Matemática

Em Nível IME/ITA

Volume 2

Algebra Vetorial e Geometria Analítica

1a. Edição

Caio dos Santos Guimarães

Caio dos Santos Guimarães

Matemática
Em Nível IME/ITA

Volume 2:
Álgebra Vetorial e Geometria Analítica

Editora Vestseller
Fortaleza - CE

1ª Edição - 2013

Sumário

Capítulo 1 – Vetores **15**
1.1. A Origem da Geometria Analítica 15
1.2. Definições e Propriedades de Vetores no R^2 e R^3 16
1.3. Produto Escalar 26
1.4. Produto Vetorial 32
1.5. Problemas de Geometria 40
1.6. Produto Misto 53
1.7. Exercícios de Fixação 56

Capítulo 2 – Estudo da Geometria no Plano e no Espaço **61**
2.1. Equação da Reta no Plano 61
2.2. Equação da Circunferência 84
2.3. Equação da Reta no Espaço 107
2.4. Equação do Plano 116
2.5. Equação da Esfera 128
2.6. Exercícios de Fixação 131

Capítulo 3 – Seções Cônicas **137**
3.1. Introdução às Seções Cônicas 137
3.2. Elipses 149
3.3. Análise Geométrica das Elipses 173
3.4. Hipérboles 190
3.5. Análise Geométrica das Hipérboles 210
3.6. Parábolas 223
3.7. Análise Geométrica das Parábolas 236
3.8. Exercícios de Fixação 256

Capítulo 4 – Cônicas: Tópicos Especiais **262**
4.1. Mudança de Coordenadas 262
4.2. Retas Tangentes 285
4.3. Diâmetros de Cônicas 288
4.4. Exercícios de Fixação 294

Apêndice **297**
A.1. Trigonometria 297
A.2. Conceitos Básicos de Geometria Plana – Triângulos 299
A.3. Tabela de Derivadas e Integrais Básicas 308

Bibliografia **310**

Projeto Rumo ao ITA **311**

Viver é como andar de bicicleta: É preciso estar em constante movimento para manter o equilíbrio.

- Albert Einstein

Como Estudar o Livro?

O livro é muito voltado a resoluções de questões do nível IME/ITA. Portanto, a teoria apresentada é direcionada a resultados que serão bastante úteis na resolução das questões do gênero. O material não é destinado àqueles que nunca estudaram o assunto antes - embora abranja todo conteúdo, para a melhor compreensão do material, é aconselhável que o aluno/professor já tenha tido contato com o assunto previamente.

As questões do IME e do ITA, em geral, envolvem mais de um assunto em um mesmo enunciado, portanto comumente nas questões que aqui são propostas, será requerido que o aluno/professor saiba o básico de outros ramos da matemática (progressões aritméticas e geométricas, geometria analítica, etc.). Quando isso for requisitado, mencionaremos o assunto que deve ser pesquisado "por fora" para a total compreensão do segmento.

Recomendamos que o aluno/professor leia toda a parte teórica (mais de uma vez, se necessário) para a fixação das idéias destacadas (lembre-se que todo o conteúdo aqui apresentado será importante, não sendo aconselhável que parte alguma seja descartada). Dê uma atenção especial aos exemplos resolvidos, que servirão de base para a resolução dos 'Exercícios de Fixação'.

Feito isso, o aluno/professor deve passar então para a parte dos "Exercícios de Fixação". Nessa seção você não encontrará exercícios fáceis (todos têm o estilo de questões IME/ITA), porém encontrará alguns exercícios mais difíceis que os outros. Para melhor orientação criamos o seguinte código:

✓ - Nível Difícil
☠ - Nível Insano

Por fim, ressaltamos que muitas das questões acompanham o nome de onde foram tiradas. Em alguns casos é comum ver a palavra 'adaptada' junto à referência. Isso acontece nos casos em que a questão é a mesma que caiu no vestibular citado, porém com alguma alteração, tornando-a mais interessante para a nossa discussão.

Para que futuras tiragens do livro estejam cada vez mais completas, pedimos aos leitores que enviem eventuais "erros" identificados ao correio eletrônico do autor: matematicanivelimeita@gmail.com. A Editora Vestseller disponibiliza a versão atualizada do arquivo de erratas dos livros Matemática Em Nível IME/ ITA (Volumes I e II) no endereço:

http://www.vestseller.com.br/Caioguimaraes

1 VETORES

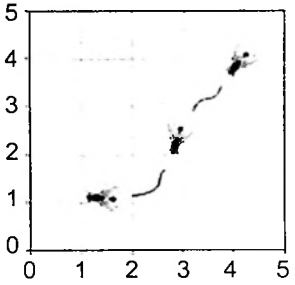
1.1. A Origem da Geometria Analítica

A ideia parece simples – boba, até. Representar figuras geométricas através de coordenadas no plano ou espaço para os estudantes hoje é tão intuitivo que nos custa acreditar que tal sugestão tenha aparecido tão tarde na evolução da geometria na história.

A maior parte da literatura no assunto atribui ao matemático e filósofo francês René Descartes (1596-1650) a proposta de descrever curvas, linhas, e outras figuras geométricas usando equações algébricas.

Assim como acredita-se que Isaac newton tenha formulado a Lei da Gravidade ao observar uma maçã caindo de uma árvore, acredita-se que Descartes tenha pensado no sistema de coordenadas ao observar, deitado em sua cama, uma mosca voando no teto.

Ele percebeu que a posição da mosca poderia ser descrita como a distância dela às paredes de seu quarto. Esse momento foi a inspiração para a criação do chamado *sistema de coordenadas cartesianas*, que possui esse nome justamente em homenagem ao seu criador.



Descartes publicou suas descobertas no ensaio *La Geometrie*, parte integrante do apêndice da obra *Discours de La Méthode* (1637). Inicialmente, sua obra em francês não foi muito bem reconhecida, principalmente devido à lingua de escrita e às suas complicadas equações.

Foi apenas depois da tradução para o latim e dos comentários do matemático holandês Van Shooten (1615-1660), doze anos mais tarde, que a obra de arte de Descartes passou a ser compreensível para a comunidade matemática e se espalhou para o mundo com seu devido reconhecimento.

Frans Van Shooten passou ainda o resto de sua vida contribuindo para o desenvolvimento da obra de Descartes, tendo sido um dos pioneiros a sugerir que

A criação da geometria analítica criou a ligação que faltava entre o estudo da geometria e álgebra, em que figuras e curvas geométricas passavam a ser representadas por equações e tratadas com muito mais rigor do que anteriormente.

A consequência desta criação teve efeito dominó: os estudos revolucionários do Cálculo Diferencial e Integral de Newton e Leibnitz, por exemplo, ou o extenso estudo da mecânica por matemáticos/físicos como Kepler, Newton e Galileu, todos tiveram alguma base na análise com coordenadas cartesianas para a geometria.

Por ironia, a simples descoberta de Descartes, observando uma simples mosca em seu teto, pode ter sido um dos maiores aceleradores do desenvolvimento da matemática em sua história!

Nas próximas páginas deste livro, vamos mergulhar neste interessantíssimo assunto, que sempre foi, e sem dúvida continuará sendo tópico recorrente nas provas do IME e do ITA.

1.2. Definições e Propriedades de Vetores no R^2 e R^3

Dizemos que uma grandeza física é um **vetor** quando convém diferenciá-la com relação à sua intensidade (módulo), direção e sentido. Quando a grandeza física é diferencia apenas por sua intensidade (módulo), a chamamos de **escalar**.

Exemplos de Grandezas Vetoriais:

Força
Velocidade
Impulso

Exemplos de Grandezas Escalares:

Energia
Tempo
Massa

Vetores podem ser representados por pares ordenados (quando tratados no plano, ou R^2) ou por ternas ordenadas (quando tratados no espaço, ou R^3). Vamos nos limitar, neste livro, a problemas envolvendo vetores em espaços de dimensão máxima 3.

Vetores de tais tipos podem ser tratados geometricamente.

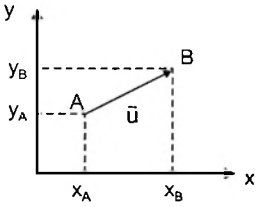


Figura 1.2.1 – Representação geométrica de um vetor no R^2

O vetor que une os pontos A e B no plano da figura 1.2.1 é representado algebricamente da seguinte forma:

$$\bar{u} = \overline{AB} = B - A = (x_B, y_B) - (x_A, y_A) = (x_B - x_A, y_B - y_A)$$

Note que a representação matemática do vetor $\bar{u}$ depende apenas dos tamanhos geométricos das projeções do vetor sobre os eixos. Isso significa que um vetor idêntico a $\bar{u}$, apenas transladado no plano possuirá sua mesma representação matemática.

Um conjunto de vetores com mesma direção, sentido e módulo a um vetor qualquer é denominado conjunto dos vetores equipolentes a $\bar{u}$.
Em termos práticos, como um vetor é definido justamente por um módulo, uma direção e um sentido, todos os vetores dentro deste conjunto representarão $\bar{u}$.

Definição 1.2.1

As representações geométrica e algébrica de um vetor de dimensão 3 são analogas.

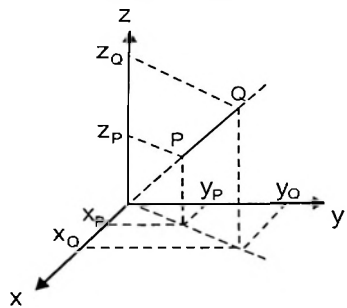


Figura 1.2.2 – Representação geométrica de um vetor R^3

$$\overline{PQ} = Q - P = (x_Q, y_Q, z_Q) - (x_P, y_P, z_P) = (x_Q - x_P,\ y_Q - y_P,\ z_Q - z_P)$$

As representações geométrica e algébrica deixam claro também que um vetor no R^2 pode se reduzir a um caso particular de um vetor no R^3 (todos os pontos do segmento orientado pelo vetor possuem o mesmo valor de cota z).

Multiplicação por um real

A multiplicação de um vetor por um real deverá alterar sua intensidade (seu comprimento geométrico).

$$\begin{cases} \bar{u} = (x_u, y_u, z_u) \\ k \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \quad k \cdot \bar{u} = (k \cdot x_u,\ k \cdot y_u,\ k \cdot z_u)$$

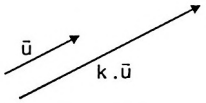


Figura 1.2.3

OBS: Se $|k| > 1$, o comprimento do novo vetor é maior que o comprimento do original. Se $0 < |k| < 1$, o comprimento do novo vetor será menor que o original.

OBS: A multiplicação de um vetor por um real negativo altera o sentido do vetor.

Um vetor $\bar{u}$ é dito **paralelo** a outro vetor $\bar{v}$ quando existe um valor k real tal que:

$$\bar{u} = k \cdot \bar{v}$$

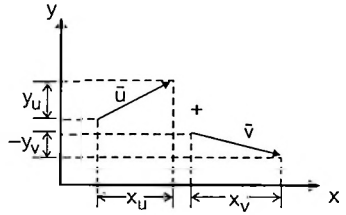
Definição 1.2.2

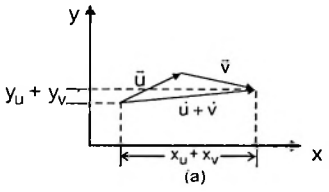
Soma de Vetores

A soma de dois vetores é definida pela soma algébrica das suas ternas (ou pares) ordenadas.

$$\dot{u} + \dot{v} = (x_u, y_u, z_u) + (x_v, y_v, z_v) = (x_u + x_v, y_u + y_v, z_u + z_v)$$

No plano, em termos geométricos, a soma se dá da seguinte forma





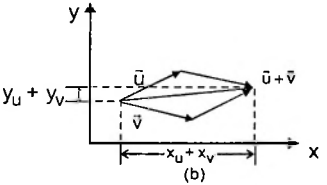
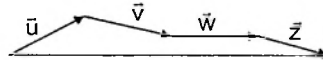


Figura 1.2.4 – Representação geométrica da soma de dois vetores – (a) Regra do Polígono; (b) Regra do Paralelogramo

OBS: No exemplo ilustrado na figura, y_v *é um valor negativo, e, com isso o* valor da ordenada do vetor resultante é menor do que a ordenada do vetor $\bar{u}$.

Regra do Polígono

Na figura 1.2.4 (a), vemos que, se coincidirmos a extremidade inicial de um vetor a ser somado com a extremidade final do primeiro, a soma vetorial pode ser obtida unindo o início e o final do conjunto geométrico. A Regra do Polígono dá margem à soma de múltiplos vetores de forma simplificada.



$\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=\vec{z}$

Fig. 1.2.5– Regra do Polígono

Demonstração:

Demonstra-se a regra do polígono para n vetores de maneira geral:

$$\overrightarrow{A_{n-1}A_n} + \overrightarrow{A_{n-2}A_{n-1}} + \ldots + \overrightarrow{A_1A_2} = A_n - A_{n-1} + A_{n-1} - A_{n-2} - + \ldots$$

$$-A_2 + A_2 - A_1 = A_n - A_1 = \overrightarrow{A_1A_n} \quad \square$$

Regra do Paralelogramo

Na figura 1.2.4 (b) vemos que se traçarmos um paralelogramo com lados iguais aos vetores a serem somados, e extremidades iniciais coincidentes, o vetor soma será representado pela diagonal que passa pelo mesmo ponto das extremidades coincidentes. O vetor soma terá também sua extremidade inicial no ponto coincidente das extremidades iniciais dos vetores a serem somados.

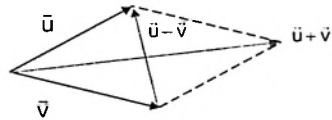


Figura 1.2.6– Regra do Paralelogramo

Módulo do Vetor

O **módulo** de um vetor é definido como o seu comprimento no plano de representação geométrica. Por isso, o módulo de um vetor será uma grandeza escalar e sempre não negativa.

Dado um conjunto de vetores com uma mesma direção e um mesmo sentido, o **vetor unitário** será aquele de módulo 1 (comprimento unitário).

Definição 1.2.3

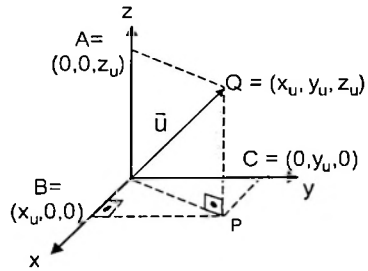


Figura 1.2.7– Módulo de um vetor

Utilizando o teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos hachurados na figura acima, temos um importante resultado:

$$|\bar{u}| = \sqrt{PQ^2 + OP^2} = \sqrt{PQ^2 + (OB^2 + OC^2)} = \sqrt{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2}$$

$$\therefore \quad \boxed{|\bar{u}| = \sqrt{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2}}$$

Resultado 1.2.1

Notação: Costuma-se chamar o vetor unitário representante da direção e sentido de um vetor ū de "versor de ū", e representá-lo com um acento circunflexo em vez da tradicional seta simbólica de vetores.

$$\hat{u} \overset{\text{definição}}{=} \frac{\bar{u}}{|\bar{u}|} \quad \Rightarrow \quad |\hat{u}| = 1 \quad \text{e} \quad \hat{u} // \bar{u}$$

Módulo de um Vetor Multiplicado por um Número Real

Multiplicando um vetor por um real k, alteramos o seu módulo por um fator multiplicativo |k|

$$|k \cdot \bar{u}| = |(k \cdot x_u,\ k \cdot y_u,\ k \cdot z_u)| = \sqrt{k^2 \cdot x_u^2 + k^2 \cdot y_u^2 + k^2 \cdot z_u^2}$$

$$= \sqrt{k^2} \cdot \sqrt{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2} = |k| \cdot |\bar{u}|$$

Vetor Nulo

O vetor nulo é um vetor de módulo igual a zero. A rigor, é o resultado da soma de dois vetores de mesmo módulo e direção, porém com sentidos contrários.

$$\forall \bar{u}, \begin{cases} \bar{0} = \bar{u} + (-\bar{u}) \\ \bar{0} + \bar{u} = \bar{u} \\ k \cdot \bar{0} = \bar{0}, \quad \forall k \in \mathbb{R} \end{cases}$$

A seta em cima do vetor nulo é realmente necessária?

Já que o vetor nulo não possui sentido e direção definidos, não poderíamos representá-lo simplesmente por 0?

OBS.: *É importante que o aluno se acostume desde já com a diferença entre uma equação envolvendo grandezas escalares e uma envolvendo vetores. Dada uma soma de vetores que se anule, atente-se à diferença na notação que usaremos de agora em diante:*

$$\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = 0 \quad \text{(incorreto)}$$

$$\dot{u} + \dot{v} + \dot{w} = \vec{0} \quad \text{(correto)}$$

Exemplo 1.2.a Determine o módulo da soma dos vetores da figura abaixo.

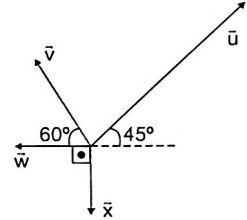


Figura 1.2.8– Módulo de um vetor

Dados: $|\dot{x}| = |\dot{w}| = 1$, $|\dot{u}| = 2|\dot{v}| = 2\sqrt{2}$

Solução:
Vamos dividir a soma em partes. A primeira delas (fig.I) é determinada com uma simples regra do paralelogramo.

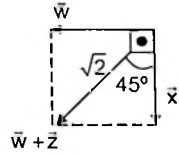


Figura I

Como $\vec{w} + \vec{x}$ e $\vec{u}$ têm a mesma direção, a soma se dá de maneira simples:

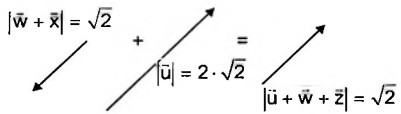


Figura II

Para somar $\vec{v}$ faremos uso da Lei dos Cossenos no triângulo hachurado (veja a figura III abaixo).

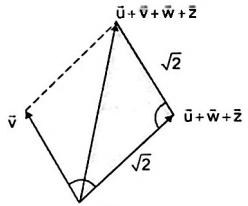


Figura III

$$|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} + \vec{x}|^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 - 2(\sqrt{2})(\sqrt{2})\cos(105^\circ) = 4 - 4\cos(105^\circ)$$

Lembrando, da trigonometria que:

$$\cos(105^\circ) = \cos(60^\circ + 45^\circ) = \cos(60^\circ)\cdot\cos(45^\circ) - \operatorname{sen}(60^\circ)\cdot\operatorname{sen}(45^\circ) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

Temos, finalmente:

$$\boxed{|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} + \vec{x}| = \sqrt{4 + \sqrt{6} - \sqrt{2}}}$$

Dependência Linear

Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ serão ditos **linearmente independentes** (L.I.) quando:

$$\alpha_1 \cdot \vec{u} + \alpha_2 \cdot \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

ou seja, quando o fato da combinação linear dos mesmos ser nula implicar na única hipótese dos fatores escalares serem nulos. Caso contrário, os dois vetores são ditos **linearmente dependentes** (L.D.).

Definição 1.2.4

Exemplo 1.2.b Mostre que dois vetores são linearmente dependentes entre si se e somente se eles são paralelos.

Solução:

Ida: "se dois vetores são L.D. entre si, então são paralelos"

Considere a igualdade: $\alpha_1 \cdot \vec{u} + \alpha_2 \cdot \vec{v} = \vec{0}$

Se, por hipótese, os vetores são linearmente dependentes, um dos fatores escalares é não nulo. Sem perda de generalidade, seja

$$\alpha_1 \neq 0 \Rightarrow \vec{u} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{u} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot \vec{v}$$

Logo, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ se diferenciam apenas pela multiplicação por um real, e com isso são paralelos.

Volta: "se dois vetores são paralelos, então são L.D. entre si"

Se, por hipótese, os vetores são paralelos, então existe k real não nulo tal que:

$$\vec{u} = k \cdot \vec{v}$$

$$\alpha_1 \cdot \vec{u} + \alpha_2 \cdot \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 \cdot k \cdot \vec{v} + \alpha_2 \cdot \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow (\alpha_1 \cdot k + \alpha_2) \cdot \vec{v} = \vec{0}$$

o que, não necessariamente implica em $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. (contraexemplo: $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -k$)

OBS: *A definição 1.2.4 pode ser estendida para um conjunto de mais vetores: O conjunto de vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ é dito linearmente independente quando.*

$$\alpha_1 \cdot \vec{v}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{v}_2 + \ldots + \alpha_n \cdot \vec{v}_n = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$$

Base Vetorial

Considere um conjunto V de vetores linearmente independentes e um outro conjunto E qualquer de vetores.
Se todos os vetores de E podem ser representados como uma combinação linear dos vetores de V, diz-se que os vetores de V formam uma **base vetorial** de E.

Definição 1.2.5

No nosso caso, nos interessarão tomar como conjunto E os espaços do R^2 e do R^3. Que tipos de conjuntos de vetores formariam uma base vetorial desses espaços?

É fácil ver que os vetores unitários paralelos aos eixos ordenados formam uma base vetorial. No caso geral do R^3, considere:

$$\vec{v}_1 = (1, 0, 0) = \hat{u}_x$$
$$\vec{v}_2 = (0, 1, 0) = \hat{u}_y$$
$$\vec{v}_3 = (0, 0, 1) = \hat{u}_z$$

É também fácil ver que os mesmos são linearmente independentes, pois:

$$\alpha_1 \cdot \vec{v}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{v}_2 + \alpha_3 \cdot \vec{v}_3 = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1(1, 0, 0) + \alpha_2(0, 1, 0) + \alpha_3(0, 0, 1) = (0, 0, 0) \Rightarrow (\alpha_1, 0, 0) + (0, \alpha_2, 0) + (0, 0, \alpha_3) = (0, 0, 0)$$
$$\Rightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 0, 0)$$
$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

Além disso, qualquer vetor (x, y, z) pode ser escrito como uma combinação linear desses vetores:

$$(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) = x \cdot \vec{v}_1 + y \cdot \vec{v}_2 + z \cdot \vec{v}_3$$

Notação: A essa base vetorial do R^3 damos o nome de **base canônica do R^3**

Exemplo 1.2.c Mostre que os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ a seguir formam uma base vetorial do R^2.

$$\vec{u} = (3, 3) \ ; \ \vec{v} = (2, 0)$$

Solução:

Primeiro devemos mostrar que os vetores são linearmente independentes.

$$\alpha_1 \cdot \vec{u} + \alpha_2 \cdot \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 \cdot (3, 3) + \alpha_2 \cdot (2, 0) = (0, 0)$$
$$\Rightarrow (3\alpha_1, 3\alpha_1) + (2\alpha_2, 0) = (0,0) \Rightarrow (3\alpha_1 + 2\alpha_2, 3\alpha_1) = (0, 0)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 3\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ 3\alpha_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

O segundo passo consiste em mostrar que qualquer vetor (x,y) do R^2 pode ser representado como uma combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$

$$(x,y) = \alpha_1(3, 3) + \alpha_2(2, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha_1 + 2\alpha_2 = x \\ 3\alpha_1 = y \end{cases} \Leftrightarrow \alpha_1 = \frac{y}{3}; \ \alpha_2 = \frac{x - y}{2}$$

Ou seja, qualquer vetor (x,y) pode ser escrito da seguinte forma:

$$(x,y) = \frac{y}{3} \cdot \vec{u} + \frac{x-y}{2} \cdot \vec{v}$$

Conclui-se que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ formam uma base vetorial do R^2.

OBS.: *Fica como* **exercício** *ao leitor mostrar que 2 vetores não paralelos formam sempre uma base vetorial do R^2 (exercício de fixação 1.12)!*

Citaremos agora 2 teoremas cujas demonstrações não são complicadas. No entanto, esses teoremas não são nosso foco principal, pois apenas os utilizaremos como ferramentas para compreender futuros resultados. A demonstração, portanto, fica como exercício para aqueles que se interessarem mais pelo assunto.

No R^3, 3 vetores formam um conjunto linearmente dependente se e somente se um dos vetores pode ser escrito como uma combinação linear dos outros 2.

Resultado 1.2.2

No R^2, conjuntos linearmente independentes contêm no máximo 2 vetores. No R^3, conjuntos linearmente independentes contêm no máximo 3 vetores.

Resultado 1.2.3

Dica para a demonstração: Baseie-se na resolução do exemplo 1.2.b.

Notação: É comum escrever um vetor como a combinação linear dos vetores da base vetorial canônica do espaço em questão. Por exemplo:

$$\bar{u} = (1, 3, -7) = \hat{u}_x + 3\hat{u}_y - 7\hat{u}_z$$

Os vetores da base vetorial canônica do R^3 também são comumente denotados pelas letras i, j , k.

$$\bar{u} = (1, 3, -7) = \hat{i} + 3\hat{j} - 7\hat{k}$$

Eu achei esse assunto de "Dependência Linear" meio complicado.
Tenho muitas dificuldades em demonstrar resultados abstrattos como esse.
Isso pode cair na prova?

Nota do Autor: *A preocupação é compreensível. Questões envolvendo diretamente "dependência linear" raramente caem no vestibular (ocasionalmente são cobradas no ITA). No entanto, entender esses conceitos pode ser muito útil! Veremos mais a frente algumas questões de geometria muito bonitas resolvidas justamente pela compreensão desse conceito. Leia e releia as partes difíceis, faça os exercícios de fixação, e garanto que a compreensão virá!*

1.3. Produto Escalar

Assim como a soma de vetores, o produto de vetores é definido de forma diferente da multiplicação algébrica de números. Estudaremos 3 tipos de produtos de vetores: produto escalar, produto vetorial e produto misto. O produto escalar (também chamado de **Produto Interno**) é denotado pela seguinte simbologia:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \text{produto escalar entre } \vec{u} \text{ e } \vec{v}$$

O resultado do produto escalar entre 2 vetores é, como o próprio nome diz, um escalar. Trata-se da soma dos produtos das respectivas coordenadas de cada vetor.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (x_u, y_u, z_u) \cdot (x_v, y_v, z_v) = x_u \cdot x_v + y_u \cdot y_v + z_u \cdot z_v$$

Definição 1.3.1

Propriedades Importantes:

1. Produto Escalar de um vetor por ele mesmo

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2}$$

Resultado 1.3.1

Demonstração: $\vec{u} \cdot \vec{u} = (x_u, y_u, z_u) \cdot (x_u, y_u, z_u) = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 = |\vec{u}|^2$ □

2. Comutatividade

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}}$$

Resultado 1.3.2

Demonstração:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (x_u, y_u, z_u) \cdot (x_v, y_v, z_v) = x_u \cdot x_v + y_u \cdot y_v + z_u \cdot z_v$$
$$= (x_v, y_v, z_v) \cdot (x_u, y_u, z_u) = \vec{v} \cdot \vec{u} \quad \square$$

3. Propriedade Distributiva

$$\boxed{\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}}$$

Resultado 1.3.3

Demonstração:

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) &= (x_u, y_u, z_u)\cdot((x_v, y_v, z_v)+(x_w, y_w, z_w))\\ &= (x_u, y_u, z_u)\cdot(x_v+x_w, y_v+y_w, z_v+z_w)\\ &= x_u\cdot(x_v+x_w)+y_u\,(y_v+y_w)+z_u\cdot(z_v+z_w)\\ &= (x_u\,x_v+y_u\cdot y_v+z_u\cdot z_v)+(x_u\cdot x_w+y_u\cdot y_w+z_u\cdot z_w)\\ &= \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}\ \square\end{aligned}$$

Equação Geométrica do Produto Escalar

Como na soma de vetores, o produto escalar também possui uma interpretação geométrica. Vejamos a seguir.

Seja θ o ângulo geométrico entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. É válido que:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\theta$$

Resultado 1.3.4 – Equação Geométrica do Produto Escalar

Demonstração:

Tomemos dois vetores com um ângulo θ entre eles.

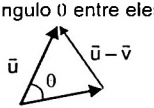


Figura 1.3.1

Da Lei dos Cossenos, vale: $|\vec{u}-\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\theta$

Utilizando o Resultado 1.3.1:

$$(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u} + \vec{v}\cdot\vec{v} - 2|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\theta$$

Com o Resultado 1.3.3:

$$\cancel{\vec{u}\cdot\vec{u}} - \vec{u}\cdot\vec{v} - \vec{v}\cdot\vec{u} + \cancel{\vec{v}\cdot\vec{v}} = \cancel{\vec{u}\cdot\vec{u}} + \cancel{\vec{v}\cdot\vec{v}} - 2|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\theta$$

Da propriedade comutativa (Resultado 1.3.2)

$$-2\vec{u}\cdot\vec{v} = -2|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\theta \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\theta$$

Devemos mostrar que a expressão também vale para θ igual a 0° e 180° (casos em que não há triângulo):

$$\theta = 0^\circ \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot k\vec{u} = k|\vec{u}|^2\cdot 1 = |\vec{u}|\cdot(k\cdot|\vec{u}|)\cdot\cos\theta \Rightarrow |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\theta$$

$$\theta = 180^\circ \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} \underset{k<0}{=} \vec{u}\cdot k\vec{u} = -k\,|\vec{u}|^2\cdot(-1) = |\vec{u}|\cdot(|k|\cdot|\vec{u}|)\cdot\cos\theta \Rightarrow |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\theta$$

Como vale para todos os ângulos possíveis, fica provado o resultado. □

Perpendicularismo entre 2 Vetores

Sejam os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não-nulos. É válido que:

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Resultado 1.3.5

Demonstração:

As demonstrações tanto da "ida" quanto da "volta" da relação de "se e somente se" acima, saem direto da Relação Geométrica do produto escalar.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos 0 = 0 \Leftrightarrow \cos\theta = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \quad \square$$

OBS.: Note que, para acharmos um vetor perpendicular a um vetor (a,b), **no $\mathbb{R}^2$**, basta invertermos as posições de a e b, e trocarmos o sinal de um eles. Ou seja:

$$(a,b) \perp (-b,a) \quad \text{e} \quad (a,b) \perp (b,-a)$$

Exemplo 1.3.a (EN) Dados dois vetores unitários $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tais que:

$$|\vec{u} + 2 \cdot \vec{v}| = |\vec{u} - \vec{v}|$$

Determine o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Solução:

Considere a igualdade:

$$|\vec{u} + 2 \cdot \vec{v}|^2 = |\vec{u} - \vec{v}|^2$$

Do resultado 1.3.1

$$\Rightarrow (\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot (\vec{u} + 2\vec{v}) = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$$

$$\Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{u} + 4\vec{u} \cdot \vec{v} + 4\vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{u} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v}$$

$$\Rightarrow |\vec{u}|^2 + 4\vec{u} \cdot \vec{v} + 4|\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2$$

$$\Rightarrow 3|\vec{v}|^2 = -6\vec{u} \cdot \vec{v} \Rightarrow 3 \cdot 1 = -6|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\theta$$

$$\Rightarrow 3 = -6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos\theta \Rightarrow \cos\theta = -\frac{1}{2}$$

Logo, o ângulo θ entre os dois vetores é:

$$\boxed{\theta = 120^\circ}$$

Exemplo 1.3.b (EN - 2003) Sabendo que $\bar{v}$ é paralelo a $\bar{p}$ e $\bar{w}$ é perpendicular a $\bar{p}$, e dado que: $\bar{u} = 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$; $\bar{p} = 3\hat{i} - \hat{j}$; $\bar{u} = \bar{v} + \bar{w}$. Determine o valor de:

$$|\bar{v} - \bar{w}|$$

Solução:

Como é v paralelo a p, e w é perpendicular a p, temos que:

$$\bar{v} \perp \bar{w} \Rightarrow \bar{v} \cdot \bar{w} = 0$$

Portanto: $|\bar{v} - \bar{w}|^2 = (\bar{v} - \bar{w}) \cdot (\bar{v} - \bar{w}) = \bar{v} \cdot \bar{v} - \underbrace{2\bar{v} \cdot \bar{w}}_{=0} + \bar{w} \cdot \bar{w} = |\bar{v}|^2 + |\bar{w}|^2$

Além disso: $|\bar{v} + \bar{w}|^2 = (\bar{v} + \bar{w}) \cdot (\bar{v} + \bar{w}) = \bar{v} \cdot \bar{v} + \underbrace{2\bar{v} \cdot \bar{w}}_{=0} + \bar{w} \cdot \bar{w} = |\bar{v}|^2 + |\bar{w}|^2$

Logo: $|\bar{v} - \bar{w}| = |\bar{v} + \bar{w}| = |\bar{u}| = \sqrt{2^2 + 1 + (-3)^2} = \sqrt{14}$

$$\boxed{|\bar{v} - \bar{w}| = \sqrt{14}}$$

Visão Geométrica do Produto Escalar: Projeção

Sejam os vetores $\bar{u}$ e $\bar{v}$ não-nulos e não paralelos. Demonstra-se que projeção de $\bar{u}$ em $\bar{v}$ é dada por:

$$\text{proj}_{\bar{v}}\bar{u} = \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{|\bar{v}|^2} \cdot \bar{v}$$

Resultado 1.3.6

Demonstração:

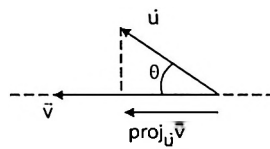


Figura 1.3.2

O módulo do vetor projeção é dado por:

$$|\text{proj}_{\bar{v}}\bar{u}| = |\bar{u}| \cdot \cos\theta = \frac{|\bar{u}| \cdot |\bar{v}| \cdot \cos\theta}{|\bar{v}|} = \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{|\bar{v}|}$$

O sentido e direção da projeção é dado pelo versor de $\bar{v}$

$$\text{proj}_{\bar{v}}\bar{u} = |\text{proj}_{\bar{v}}\bar{u}| \cdot \hat{v} = \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{|\bar{v}|} \cdot \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|} = \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{|\bar{v}|^2} \cdot \bar{v} \quad \square$$

Note que o caso em que o ângulo θ é obtuso está incluso na demonstração. Neste caso o produto escalar, que acaba dando o sentido do vetor projeção, será negativo, e, portanto, a projeção terá sentido contrário ao de $\vec{v}$.

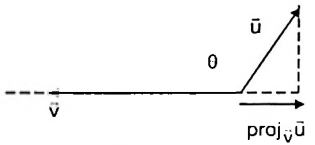


Figura 1.3.3

Exemplo 1.3.c Considere o triângulo dado pelos vértices A = (1, 1, 1), B = (1, 2, 4) e C = (0, –2, 3). Calcule as coordenadas do "pé" H da altura relativa ao lado BC.

Solução:
Considere a figura abaixo.

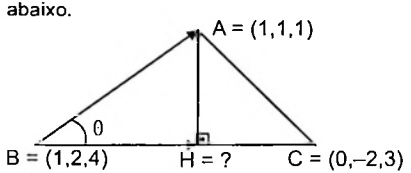


Figura I

Sabe-se que:

$$\overline{BA} = A - B = (1, 1, 1) - (1, 2, 4) = (0, -1, -3)$$

$$\overline{BC} = C - B = (0, -2, 3) - (1, 2, 4) = (-1, -4, -1)$$

$$\overline{BH} = \text{proj}_{\overline{BC}}\overline{BA} = \frac{\overline{BA}\cdot\overline{BC}}{|\overline{BC}|^2}\cdot\overline{BC}$$

$$\overline{BH} = \frac{(0, -1, -3)\cdot(-1, -4, -1)}{(-1)^2 + (-4)^2 + (-1)^2}\cdot\overline{BC} = \frac{7}{18}\cdot\overline{BC}$$

Finalmente

$$\overline{BH} = \frac{7}{18}\cdot\overline{BC} \quad \Rightarrow \quad 18(H - B) = 7(C - B)$$

$$\Rightarrow \quad H = \frac{7C + 11B}{18} = \frac{(0, -14, 21) + (11, 22, 44)}{18} = \left(\frac{11}{18}, \frac{4}{9}, \frac{65}{18}\right)$$

$$\boxed{H = \left(\frac{11}{18}, \frac{4}{9}, \frac{65}{18}\right)}$$

Exemplo 1.3.d Seja E um ponto sobre o prolongamento por B do lado AB do quadrado ABCD. Seja F a interseção de DE e BC e G, a interseção de AF e CE. Prove que BG é perpendicular a DE.

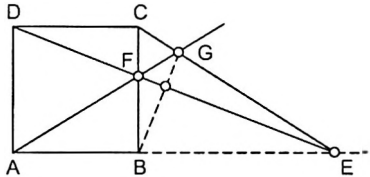


Figura 1.3.4

Solução: Considere o sistema de eixos adotado tais que o lado do quadrado ABCD seja unitário. Desta forma, representemos as coordenadas de F e E por: E = (e,0) e F = (1,f).

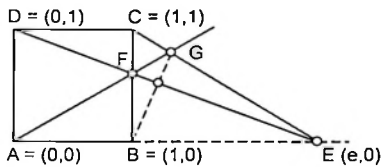


Figura I

Com isso:

$$\begin{cases} \overline{DF} = F - D = (1,\ f-1) \\ \overline{DE} = E - D = (e,\ -1) \end{cases}$$

Como os vetores $\overline{DE}$ e $\overline{DF}$ são paralelos, existe um fator real k, tal que:

$$\overline{DE} = k \cdot \overline{DF}$$

$$(e,-1) = k \cdot (1,f-1) \quad \Rightarrow \quad k = \frac{e}{1} = \frac{-1}{f-1} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{e-1}{e}$$

(Lembrando que os passos acima são válidos uma vez que $f \neq 1$, $e \neq 0$)

Podemos escrever agora:

$$\overline{AF} = F - A = \left(1,\ \frac{e-1}{e}\right)$$

Sendo G = (x,y) a interseção das retas CE e AF, temos:

$$\begin{cases} \overline{CG} \ // \ \overline{CE} \quad \Rightarrow \quad \overline{CG} = m \cdot \overline{CE}, \quad m \in \mathbb{R} \\ \overline{AG} \ // \ \overline{AF} \quad \Rightarrow \quad \overline{AG} = n \cdot \overline{AF}, \quad n \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\begin{cases} G - C = m(E-C) \Rightarrow G = C + m(e-1, -1) = (1 + m(e-1), 1-m),\ m \in \mathbb{R} \\ G - A = n(F-A) \Rightarrow G = A + n\left(1, \dfrac{e-1}{e}\right) = \left(n, \dfrac{n(e-1)}{e}\right),\ n \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Com isso: $\left(n, \dfrac{n\cdot(e-1)}{e}\right) = (1 + m(e-1), 1-m)$

De onde segue (dado que $e \neq 1$)

$$\begin{cases} n = 1 + m(e-1) \\ n = \dfrac{e(1-m)}{e-1} \end{cases} \Rightarrow 1 + m(e-1) = \frac{e(1-m)}{e-1}$$

Resolvendo:

$$e - 1 + m(e-1)^2 = e - e\cdot m \Rightarrow m = \frac{1}{e^2 - e + 1}$$

A coordenada de G neste sistema será:

$$G = \left(1 + \frac{e-1}{e^2 - e + 1}, 1 - \frac{1}{e^2 - e + 1}\right) = \left(\frac{e^2}{e^2 - e + 1}, \frac{e^2 - e}{e^2 - e + 1}\right)$$

Temos portanto:

$$\begin{cases} \overline{BG} = G - B = \left(\dfrac{e^2}{e^2 - e + 1}, \dfrac{e^2 - e}{e^2 - e + 1}\right) - (1, 0) = \left(\dfrac{e-1}{e^2 - e + 1}, \dfrac{e(e-1)}{e^2 - e + 1}\right) \\ \overline{DE} = (e, -1) \end{cases}$$

Finalmente, calculamos o produto escalar para testar a perpendicularidade:

$$\overline{DE}\ \overline{BG} = (e, -1)\cdot\left(\frac{e-1}{e^2 - e + 1}, \frac{e(e-1)}{e^2 - e + 1}\right) = \frac{e(e-1)}{e^2 - e + 1} - \frac{e(e-1)}{e^2 - e + 1} = 0$$

Do resultado 1.3.5, temos que $\overline{DE}$ e $\overline{BG}$ são perpendiculares. □

1.4. Produto Vetorial

Vimos que o resultado do produto interno entre 2 vetores é um número escalar. O desenvolvimento da física exigiu da matemática o estudo das propriedades de um outro tipo de produto entre 2 vetores.

A notação do produto vetorial, também conhecido como **Produto Externo**, pode ser encontrada na literatura nas formas a seguir:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \text{produto vetorial de } \vec{u} \text{ por } \vec{v}$$

O resultado do produto vetorial entre 2 vetores no R^3 é um valor perpendicular ao plano definido pelos mesmos. O sentido do vetor resultante é dado pela "Regra da Mão Direita". Sendo θ o ângulo entre os dois vetores, o módulo do vetor resultante é definido da seguinte forma:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \text{sen}\theta$$

Definição 1.4.1

Regra da Mão Direita

A regra da mão direita é um método mnemônico, criado pelo físico e eletrônico John A. Fleming, para lembrar o sentido definido para o resultado de um produto vetorial entre dois vetores.

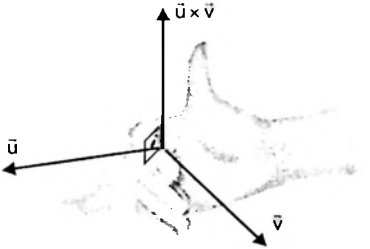


Figura 1.4.1

John Ambrose Fleming
(1849-1945)

Regra da Mão Direita

Para determinar o sentido definido do produto vetorial, deve-se seguir os passos (ilustrado na **figura 1.4.1**):

1. Espalmar a mão com os dedos apontando na direção e sentido de $\vec{u}$
2. Curvar os dedos para apontar na direção e sentido de $\vec{v}$
3. A direção do seu polegar esticado indica o sentido definido do produto.

Definição 1.4.2

OBS.: Conforme já discutimos existem várias bases vetoriais para o R^3. No entanto, a base denominada base canônica do R^3 é a formada pelos vetores:

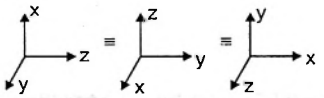
$$\hat{i} = (1, 0, 0); \quad \hat{j} = (0, 1, 0); \quad \hat{k} = (0, 0, 1)$$

Observe que, da definição de produto externo e de sua direção, teremos:

$$\hat{i} \wedge \hat{j} = \hat{k}$$
$$\hat{j} \wedge \hat{k} = \hat{i}$$
$$\hat{k} \wedge \hat{i} = \hat{j}$$

Portanto, quando arbitrarmos eixos coordenados a um sistema geométrico, devemos nos lembrar que as direções dos eixos devem ser tais que:

$$\overline{Ox} \wedge \overline{Oy} = \overline{Oz}$$
$$\overline{Oy} \wedge \overline{Oz} = \overline{Ox}$$
$$\overline{Oz} \wedge \overline{Ox} = \overline{Oy}$$



Propriedades Importantes:

1. Produto Vetorial de um vetor por outro paralelo a ele

$$\boxed{\vec{u} \times (k \cdot \vec{u}) = \vec{0}}$$

Resultado 1.4.1

Demonstração: $|\vec{u} \times (k \cdot \vec{u})| = |\vec{u}| \cdot |k \cdot \vec{u}| \cdot \text{sen}0^\circ = 0 \Rightarrow \vec{u} \times (k \cdot \vec{u}) = \vec{0}$ □

2. Anti-Comutatividade

$$\boxed{\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})}$$

Resultado 1.4.2

Demonstração: Segue direto da definição do sentido do produto vetorial (Regra da Mão direita)

3. Propriedade Distributiva

$$\boxed{\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}}$$

Resultado 1.4.3

Demonstração: A demonstração requer uma análise geométrica e será pedida como um dos Exercícios de Fixação deste capitulo.

4. Multiplicação de um dos fatores por um fator real k

$$\boxed{\vec{u} \times (k \cdot \vec{v}) = k(\vec{u} \times \vec{v}) = (k\vec{u}) \times \vec{v}}$$

Resultado 1.4.4

Demonstração: A regra da mão direita dá o mesmo sentido resultante para as 3 parcelas acima (para k negativo e positivo). Além disso, os módulos também são iguais:

$$|\vec{u}\times(k\cdot\vec{v})| = |\vec{u}|\cdot|k\cdot\vec{v}|\cdot\text{sen}\theta = |k|\cdot|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\text{sen}\theta =$$
$$|k|\cdot|\vec{u}\times\vec{v}| = |(k\cdot\vec{u})\times\vec{v}| = |k\cdot(\vec{u}\times\vec{v})| \quad \square$$

Equação Matricial do Produto Vetorial

Sejam $\vec{u} = (x_u,\ y_u,\ z_u)$ e $\vec{v} = (x_v,\ y_v,\ z_v)$. O produto vetorial pode ser escrito na forma matricial:

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}$$

Resultado 1.4.5 – Equação Matricial do Produto Vetorial

Demonstração:

Escrevamos os vetores como combinação linear dos vetores da base canônica do R^3.

$$\vec{u} = x_u\cdot\hat{i} + y_u\cdot\hat{j} + z_u\cdot\hat{k};\quad \vec{v} = x_v\cdot\hat{i} + y_v\cdot\hat{j} + z_v\cdot\hat{k}$$

Fazendo o produto vetorial:

$$\vec{u}\times\vec{v} = \left(x_u\cdot\hat{i} + y_u\cdot\hat{j} + z_u\cdot\hat{k}\right)\times\left(x_v\cdot\hat{i} + y_v\cdot\hat{j} + z_v\cdot\hat{k}\right)$$

Res. 1.4.3
$$= \left(x_u\cdot\hat{i}\times x_v\cdot\hat{i}\right) + \left(x_u\cdot\hat{i}\times y_v\cdot\hat{j}\right) + \left(x_u\cdot\hat{i}\times z_v\cdot\hat{k}\right) + \left(y_u\cdot\hat{j}\times x_v\cdot\hat{i}\right)$$
$$+ \left(y_u\cdot\hat{j}\times y_v\cdot\hat{j}\right) + \left(y_u\cdot\hat{j}\times z_v\cdot\hat{k}\right) + \left(z_u\cdot\hat{k}\times x_v\cdot\hat{i}\right)$$
$$+ \left(z_u\cdot\hat{k}\times y_v\cdot\hat{j}\right) + \left(z_u\cdot\hat{k}\times z_v\cdot\hat{k}\right)$$

Res. 1.4.4
$$= x_u\cdot x_v\underbrace{\left(\hat{i}\times\hat{i}\right)}_{=\vec{0}} + x_u\cdot y_v\underbrace{\left(\hat{i}\times\hat{j}\right)}_{\hat{k}} + x_u\cdot z_v\underbrace{\left(\hat{i}\times\hat{k}\right)}_{-\hat{j}} + y_u\cdot x_v\underbrace{\left(\hat{j}\times\hat{i}\right)}_{-\hat{k}}$$
$$+ y_u\cdot y_v\underbrace{\left(\hat{j}\times\hat{j}\right)}_{=\vec{0}} + y_u\cdot z_v\cdot\underbrace{\left(\hat{j}\times\hat{k}\right)}_{\hat{i}} + z_u\cdot x_v\cdot\underbrace{\left(\hat{k}\times\hat{i}\right)}_{=\hat{j}}$$
$$+ z_u\cdot y_v\cdot\underbrace{\left(\hat{k}\times\hat{j}\right)}_{=-\hat{i}} + z_u\cdot z_v\cdot\underbrace{\left(\hat{k}\times\hat{k}\right)}_{=\vec{0}}$$

Re-arrumando:

$$\bar{u}\times\bar{v} = (y_u\cdot z_v - z_u\cdot y_v)\hat{i} + (z_u\cdot x_v - x_u\cdot z_v)\hat{j} + (x_u\cdot y_v - y_u\cdot x_v)\hat{k}$$

$$= \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}\cdot\hat{i} - \begin{vmatrix} x_u & z_u \\ x_v & z_v \end{vmatrix}\cdot\hat{j} + \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}\cdot\hat{k} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} \quad \square$$

Na última passagem foi usado o teorema de Laplace para determinantes, citado no Apêndice deste livro.

Visão Geométrica do Produto Vetorial: Área

Assim como o produto escalar estava ligado à projeção de um vetor em outro, podemos dizer que o produto vetorial também possui uma interpretação geométrica.

Sejam os vetores $\bar{u}$ e $\bar{v}$ não-nulos e não paralelos. A área do paralelogramo de lados orientados por $\bar{u}$ e $\bar{v}$ é dada por:

$$A_{paralelogramo} = |\bar{u}\times\bar{v}|$$

A área do triângulo com dois lados orientados por $\bar{u}$ e $\bar{v}$ é dada por:

$$A_{\Delta} = \frac{|\bar{u}\times\bar{v}|}{2}$$

Resultado 1.4.6

Demonstração:

Considere a figura I abaixo.

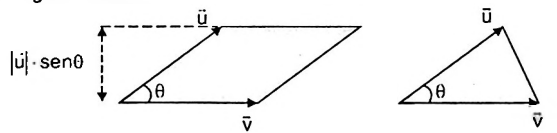


Figura 1.4.2

Da geometria plana, a área é dada por:

$$A_{paralelogramo} = (base)\cdot(altura) = |\bar{v}|\cdot(|\bar{u}|\cdot sen\theta) = |\bar{u}\times\bar{v}|$$

A área do triângulo será, portanto:

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2}A_{paralelogramo} = \frac{|\bar{u}\times\bar{v}|}{2} \quad \square$$

Exemplo 1.4.a Demonstre que, dadas as coordenadas dos vértices de um triângulo no plano (R^2), A = (a_1,a_2); B = (b_1,b_2); C (c_1,c_2) , a área do triângulo é dada por:

$$S = \frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{matrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{matrix}\right\|$$

Solução:

Do resultado 1.4.6, temos que (OBS: como os dois vetores estão no plano, suas componentes na direção $\hat{k}$ são nulas, e portanto a 3ª coluna do determinante abaixo é nula):

$$S = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{matrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ b_1-a_1 & b_2-a_2 & 0 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & 0 \end{matrix}\right\|$$

Desenvolvendo:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\cdot\left|\left((b_1-a_1)\cdot(c_2-a_2) - (b_2-a_2)\cdot(c_1-a_1)\right)\cdot\hat{k}\right| \\ &= \frac{1}{2}\cdot\left|\left((b_1-a_1)\cdot(c_2-a_2) - (b_2-a_2)\cdot(c_1-a_1)\right)\right| \\ &= \frac{1}{2}\cdot\left| b_1\cdot c_2 - b_1\cdot a_2 - a_1\cdot c_2 + \cancel{a_1\cdot a_2} - b_2\cdot c_1 + b_2\cdot a_1 + a_2\cdot c_1 - \cancel{a_2\cdot a_1}\right| \\ &= \frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{matrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{matrix}\right\| \quad \square \end{aligned}$$

Colinearidade entre 3 pontos

Os pontos A = (a_1,a_2); B = (b_1,b_2); C = (c_1,c_2) são colineares, se e somente se:

$$\left|\begin{matrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{matrix}\right| = 0$$

Resultado 1.4.7

Demonstração: A demonstração é direta, a partir do resultado do exemplo 1.4.a. Fica, portanto, como exercício ao leitor!

Exemplo 1.4.b

a) Verifique se os pontos A = (1,2) , B = (–2,–2) e C = (2,4) são colineares no plano R^2.

b) Determine o valor de t para que C = (t, 2t) seja colinear com A = (1,2) e B = (–2,–2).

c) Verifique se os pontos A = (1,3,3) , B = (2,1,0), C = (4,–3,–6) do R^3 são colineares no espaço R^3.

Solução:

a) Como se trata de pontos no R^2, podemos usar o resultado 1.4.7 para verificar se os pontos A, B e C são colineares.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 4 - 8 + 4 - 4 + 4 = -2 \neq 0$$

A, B, C não são colineares.

b) Para que os pontos A, B e C sejam colineares basta que o determinante do resultado 1.4.7 seja nulo.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ t & 2t & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -2 + 2t - 4t + 2t - 2t + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{t = 1}$$

(Para que C, da forma proposta, seja colinera com A e B, precisará coincidir com A)

c) Não podemos mais usar o resultado 1.4.7, pois estamos agora analisando pontos no espaço. Para que A, B, C sejam colineares basta que os vetores $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ sejam paralelos. No R^3, se os vetores dois vetores são paralelos, então seu produto vetorial será nulo (resultado 1.4.1). Vamos verificar!

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -2 & -3 \\ 3 & -6 & -9 \end{vmatrix} = \bar{0} \quad \text{(linhas de 2 e 3 são proporcionais)}$$

A, B, C são colineares.

Exemplo 1.4.c Calcule a área do triângulo formado pelos pontos médios de duas arestas de vértice comum de um cubo e pelo ponto médio da aresta ortogonal (e reversa) àquelas arestas. Dê o resultado em função da aresta a do cubo.

Solução:

Tomemos as arestas concorrentes em um dos vértices como eixos coordenados. As figuras I e II abaixo mostram como determinamos as coordenadas, neste sistema de eixos, dos pontos que constituem o triângulo a ser analisado.

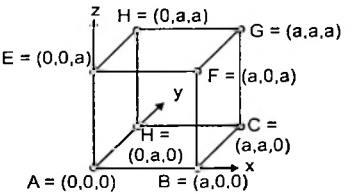


Figura I

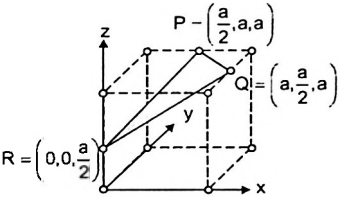


Figura II

A área do triângulo será dada por (Resultado 1.4.6):

$$A_{\Delta} = \frac{\left|\overrightarrow{RP} \times \overrightarrow{RQ}\right|}{2} = \frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{a}{2}-0 & a-0 & a-\frac{a}{2} \\ a-0 & \frac{a}{2}-0 & a-\frac{a}{2} \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{a}{2} & a & \frac{a}{2} \\ a & \frac{a}{2} & \frac{a}{2} \end{matrix} \right\|$$

Calculando:

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2}\left|\left(\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{4}\right)\hat{i} - \left(\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{2}\right)\hat{j} + \left(\frac{a^2}{4}-a^2\right)\hat{k}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|\left(\frac{a^2}{4}, \frac{a^2}{4}, -\frac{3a^2}{4}\right)\right| = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\left(\frac{a^2}{4}\right)^2 + \left(\frac{a^2}{4}\right)^2 + \left(-\frac{3a^2}{4}\right)^2}$$

$$= \frac{a^2\cdot\sqrt{11}}{8}$$

$$\boxed{A_{\Delta} = \frac{a^2\cdot\sqrt{11}}{8}}$$

Exemplo 1.4.d Demonstre que dados 3 vetores quaisquer, a equação chamada de Identidade de Lagrange sempre será satisfeita:

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = \vec{b}\cdot\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right) - \vec{c}\cdot\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$$

Solução:

Sejam: $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$, tem-se, desenvolvendo o lado esquerdo da identidade:

$$\vec{b}\times\vec{c} = (b_2\cdot c_3 - b_3\cdot c_2,\ b_3\cdot c_1 - b_1\cdot c_3,\ b_1\cdot c_2 - b_2\cdot c_1)$$

E, portanto:

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{pmatrix} a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3) \\ a_3(b_2c_3 - b_3c_2) - a_1(b_1c_2 - b_2c_1) \\ a_1(b_3c_1 - b_1c_3) - a_2(b_2c_3 - b_3c_2) \end{pmatrix}^T$$

Verifiquemos que o lado direito equivale à expressão acima:

$$\vec{b}\cdot(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b}) =$$

$$= \begin{pmatrix} (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_1 \\ (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_2 \\ (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_3 \end{pmatrix}^T - \begin{pmatrix} (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)c_1 \\ (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)c_2 \\ (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)c_3 \end{pmatrix}^T =$$

$$= \begin{pmatrix} a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3) \\ a_3(b_2c_3 - b_3c_2) - a_1(b_1c_2 - b_2c_1) \\ a_1(b_3c_1 - b_1c_3) - a_2(b_2c_3 - b_3c_2) \end{pmatrix}^T$$

Com isso, provamos a identidade. ▫

OBS.: Note que é $\vec{b}\times\vec{c}$ um vetor perpendicular ao plano formado pelos vetores $\vec{b}$ e $\vec{c}$. Logo $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$, por ser perpendicular a este vetor, estará contido no plano formado por b e c. Consequentemente, $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ deverá ser uma combinação linear dos vetores $\vec{b}$ e $\vec{c}$, como bem verifica-se no lado direito da identidade.

1.5. Problemas de Geometria

A representação geométrica dos vetores, tanto no R^2 quanto no R^3, já sugere grandes aplicações dos vetores no ramo da Geometria. Veremos o quanto isto é verdade nesta seção. Para que a compreensão desta seção flua melhor, é pedido que o leitor já tenha tido contato com Geometria. Para ajudar neste requesito, o apêndice deste livro contém as definições de termos como "ceviana", "bissetriz", "mediana", "mediatriz", "altura", ..., entre outros, que serão bastante usados daqui para frente.

Ponto Médio de um Segmento

O ponto médio M do segmento AB é expresso em função das coordenadas de A e de B da seguinte maneira:

$$M = \frac{A + B}{2}$$

Demonstração:

Sendo M o ponto médio do segmento AB:

$$\overline{AM} = \overline{MB} \Rightarrow M - A = B - M \Rightarrow M = \frac{A + B}{2} \quad \square$$

Exemplo 1.5.a Determine o ponto D que resulta da reflexão de A = (1,1) em relação à reta que une os pontos B = (2,3) e C = (5,4).

Solução: Temos que os vetores:

$$\overline{BC} = C - B = (5, 4) - (2, 3) = (3, 1)$$
$$\overline{AD} = D - A = (x, y) - (1, 1) = (x-1, y-1)$$

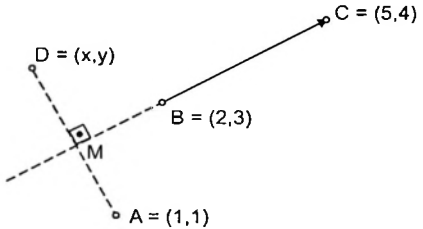


Figura I

Como esses vetores são perpendiculares, temos:

$$\overline{BC} \cdot \overline{AD} \Rightarrow (3, 1) \cdot (x-1, y-1) = 0 \Rightarrow 3x - 3 + y - 1 = 0$$
$$\Rightarrow 3x + y - 4 = 0 \quad \text{(eq. I)}$$

Alem disso, os vetores $\overline{MB}$ e $\overline{BC}$ são paralelos, onde M é o ponto médio do segmento AD.

$$\overline{MB} \,//\, \overline{BC} \Rightarrow (2, 3) - \frac{(x, y) + (1, 1)}{2} = k(3, 1) \Rightarrow \left(2 - \frac{x+1}{2}, 3 - \frac{y+1}{2}\right) = (3k, k)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 - \dfrac{x+1}{2} = 3k \\ 3 - \dfrac{y+1}{2} = k \end{cases} \Rightarrow 2 - \frac{x+1}{2} = 9 - 3\left(\frac{y+1}{2}\right) \Rightarrow 3y - x = 12 \quad \text{(eq. II)}$$

Das equações I e II, temos:

$$\begin{cases} 3x + y - 4 = 0 \\ 3y - x = 12 \end{cases} \Rightarrow x = 0;\ y = 4 \ \therefore \ \boxed{D = (0, 4)}$$

Exemplo 1.5.b Mostre que as 3 medianas de um triângulo qualquer se interceptam em um único ponto (o baricentro) e que este ponto divide cada uma das medianas em 2 segmentos na razão 1:2

Solução:

O fato de que 2 medianas se cruzam em um ponto é trivial. Seja G esse ponto. Mostremos que a 3ª mediana passa também por G. Sejam M, N, O os pontos médios dos lados BC, AC e AB, respectivamente.

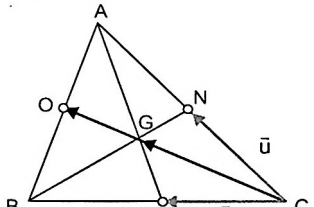


Figura I

Para mostrar que a 3ª mediana passa por G, basta mostrar que os vetores $\overrightarrow{CG}$ e $\overrightarrow{GO}$ são paralelos.

Escrevamos esses dois vetores em termo dos vetores linearmente independentes ū e v̄ escolhidos:

$$\begin{cases} \overrightarrow{NA} = \overrightarrow{CN} = \bar{u} \\ \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CM} = \bar{v} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} = \bar{u} - 2\bar{v} \\ \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM} = -2\bar{u} + \bar{v} \end{cases}$$

Além disso:

$$\begin{cases} \overrightarrow{BG} = m \cdot \overrightarrow{GN} \\ \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GN} = \overrightarrow{BN} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{GN} = \frac{1}{m+1} \cdot \bar{u} - \frac{2}{m+1} \cdot \bar{v}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{GM} = n \cdot \overrightarrow{AG} \\ \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GM} = \overrightarrow{AM} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AG} = -\frac{2}{n+1} \cdot \bar{u} + \frac{1}{n+1} \cdot \bar{v}$$

Da regra do polígono no triângulo AGN:

$$\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GN} = \overrightarrow{AN}$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{n+1} \cdot \bar{u} + \frac{1}{n+1} \cdot \bar{v} + \frac{1}{m+1} \cdot \bar{u} - \frac{2}{m+1} \cdot \bar{v} + \bar{u} = \bar{0}$$

Como ū e v̄ são linearmente independentes, pela definição 1.2.4 temos:

$$-\frac{2}{n+1} + \frac{1}{m+1} + 1 = \frac{1}{n+1} - \frac{2}{m+1} = 0$$

De onde segue:

$$n = \frac{1}{2};\quad m = 2$$

Temos ainda que:

$$(\Delta GMC):\ \overrightarrow{CG} = \vec{v} - \overrightarrow{GM} = \vec{v} - n\cdot\left(-\frac{2}{n+1}\cdot\vec{u} + \frac{1}{n+1}\cdot\vec{v}\right)$$

$$(\Delta AGO):\ \overrightarrow{GO} = -\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{AG} = -\frac{(2\vec{u} - 2\vec{v})}{2} - \left(-\frac{2}{n+1}\cdot\vec{u} + \frac{1}{n+1}\cdot\vec{v}\right)$$

Logo:

$$\begin{cases} \overrightarrow{CG} = \dfrac{2}{3}\cdot\vec{u} + \dfrac{2}{3}\cdot\vec{v} \\ \overrightarrow{GO} = \dfrac{1}{3}\cdot\vec{u} + \dfrac{1}{3}\cdot\vec{v} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{CG} = 2\cdot\overrightarrow{GO}$$

Este último resultado mostra que os vetores $\overrightarrow{CG}$ e $\overrightarrow{GO}$ são paralelos e dividem o segmento em duas partes na razão 1 : 2. Como a escolha da mediana a ser tomada como 3ª mediana foi arbitrária, a razão em que G divide cada uma das 3 medianas é a mesma. □

Exemplo 1.5.c (baseada em questão do IME – 2004) Considere o triângulo ABC da figura. Marca-se o ponto P sobre o lado AC e Q sobre o lado BC tais que:

$$\overline{PA} \,/\, \overline{PC} = q;\ \overline{QB} \,/\, \overline{QC} = r$$

As cevianas AQ e BP encontram-se em T, conforme ilustrado na figura. Determine as relações $\overline{BT} \,/\, \overline{TP}$ e $\overline{TQ} \,/\, \overline{AT}$ em função de q e r:

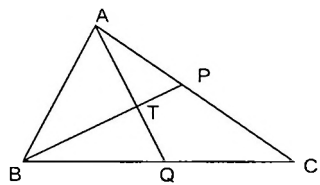


Figura 1.5.1

Solução:

Vamos tentar atacar o problema utilizando uma metodologia semelhante à usada no exemplo anterior. Escolhemos dois vetores linearmente independentes interessantes para iniciar o problema.

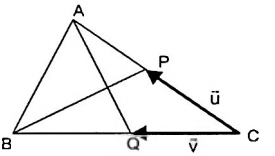


Figura I

Escrevamos os demais vetores interessantes à questão em função dos escolhidos $\bar{u}$ e $\bar{v}$.

$$\begin{cases} \dfrac{|\overline{PA}|}{|\overline{CP}|} = \dfrac{|\overline{PA}|}{|\bar{u}|} = q \\ \overline{PA} = k_1 \cdot \bar{u} \end{cases} \therefore \quad \overline{PA} = q \cdot \bar{u} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \dfrac{|\overline{QB}|}{|\overline{CQ}|} = \dfrac{|\overline{QB}|}{|\bar{v}|} = r \\ \overline{QB} = k_2 \cdot \bar{v} \end{cases} \therefore \quad \overline{QB} = r \cdot \bar{v}$$

Utilizando a Regra do Polígono nos triângulos BCP e AQC, respectivamente

$$\overline{BP} = \overline{CP} + \overline{BC} = \bar{u} - (\bar{v} + r \cdot \bar{v}) = \bar{u} - (r + 1) \cdot \bar{v}$$

$$\overline{AQ} = \overline{AC} + \overline{CQ} = -(q + 1) \cdot \bar{u} + \bar{v}$$

Sabe-se que:

$$\begin{cases} \overline{BT} + \overline{TP} = \overline{BP} \\ \overline{BT} = m \cdot \overline{TP}, \quad m \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \overline{TP} = \left(\frac{1}{m+1}\right) \cdot \bar{u} + \left(-\frac{r+1}{m+1}\right) \cdot \bar{v}$$

$$\begin{cases} \overline{AT} + \overline{TQ} = \overline{AQ} \\ \overline{TQ} = n \cdot \overline{AT}, \quad n \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \overline{AT} = \left(-\frac{q+1}{n+1}\right) \cdot \bar{u} + \left(\frac{1}{n+1}\right) \cdot \bar{v}$$

Além disso:

$$\overline{AT} + \overline{TP} + \overline{PA} = \bar{0}$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{q+1}{n+1}\right) \cdot \bar{u} + \left(\frac{1}{n+1}\right) \cdot \bar{v} + \left(\frac{1}{m+1}\right) \cdot \bar{u} + \left(-\frac{r+1}{m+1}\right) \cdot \bar{v} + q \cdot \bar{u} = \bar{0}$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{q+1}{n+1} + \frac{1}{m+1} + q\right) \cdot \bar{u} + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{r+1}{m+1}\right) \cdot \bar{v} = \bar{0}$$

Como $\bar{u}$ e $\bar{v}$ são linearmente independentes, pela definição 1.2.4 temos:

$$-\frac{q+1}{n+1} + \frac{1}{m+1} + q = \frac{1}{n+1} - \frac{r+1}{m+1} = 0$$

Nos interessa determinar m e n. Re-arrumando o sistema:

$$\therefore \begin{cases} \dfrac{1}{m+1} = \dfrac{q+1}{n+1} - q \\ \dfrac{1}{n+1} = (r+1) \cdot \left(\dfrac{q+1}{n+1} - q\right) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{n+1} \cdot (1 - (r+1) \cdot (q+1)) = -(r + 1)q$$

$$\Rightarrow n + 1 = \frac{(r+1) \cdot (q+1) - 1}{(r+1)q} = \frac{rq + r + q}{(r + 1)q}$$

De onde segue:

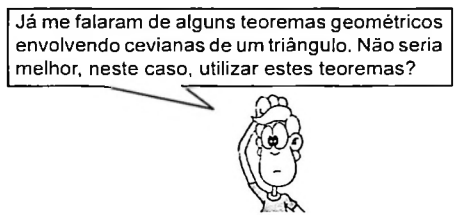
$$\boxed{n = \frac{\overline{TQ}}{\overline{AT}} = \frac{r}{(r+1)q}}$$

Calculando m:

$$\frac{1}{m+1} = \frac{q+1}{n+1} - q = \frac{q+1}{\frac{r}{(r+1)q} + 1} - q =$$

$$q\left(\frac{(q+1)\cdot(r+1) - r - (r+1)q}{r + (r+1)q}\right) = \frac{q}{r + (r+1)q}$$

$$\boxed{m = \frac{\overline{BT}}{\overline{TP}} = \frac{r(q+1)}{q}}$$



OBS.: Certamente o nosso colega está se referindo aos Teoremas importantíssimos de Menelaus e Ceva. O aluno que está se preparando em nível IME-ITA certamente se esbarrará com esses teoremas ao estudar Geometria Plana. De fato, o Teorema de Menelaus seria uma saída excelente no caso do exemplo acima. No entanto, é importante que fique nacabeça a metodologia empregada na resolução dos últimos 2 exemplos poisserá muito útil em outros exercícios semelhantes.
Se você nunca ouviu falar dos Teoremas de Menelaus e de Ceva, não se preocupe. Esses teoremas serão tema de dicussão nos exercícios de fixação!

Baricentro

Dado um polígono $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$, o seu **baricentro** é definido como o ponto com coordenadas iguais à media aritmética das coordenadas dos vértices do polígono.

$$G = \frac{A_1 + A_2 + ... + A_n}{n}$$

Definição 1.5.1

No caso do polígono regular, o baricentro coincide com o centro da circunferência circunscrita ao polígono. Geralmente, no caso do polígono regular, o baricentro é denominado apenas como **centro** do polígono.

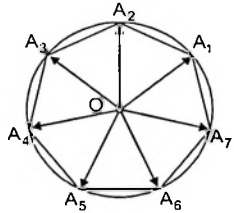


Figura 1.5.2

Vale a pena destacar o seguinte resultado:

$$G = \frac{A_1 + A_2 + \ldots + A_n}{n} \Rightarrow n \cdot G = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$$

$$\Rightarrow 0 = (A_1 - G) + (A_2 - G) + \ldots + (A_n - G)$$

$$\Rightarrow \vec{0} = \overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2} + \ldots + \overrightarrow{GA_n}$$

A soma dos vetores que ligam os vértices de um **polígono regular** ao seu baricentro (centro) é o vetor nulo.

$$\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2} + \ldots + \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$$

Resultado 1.5.2

Baricentro do Triângulo Qualquer

As medianas relativas aos 3 vértices de um triângulo qualquer se cruzam em um único ponto coincidente com o **baricentro** deste triângulo.

Resultado 1.5.3

Demonstração: A concorrência das 3 medianas de um triângulo em um único ponto foi demonstrada no exemplo 1.5.b Seja G este ponto de concorrência.

Sendo O é ponto médio de AB, temos do resultado do mesmo exemplo:

$$\overline{CG} = 2\overline{GO} \Rightarrow G - C = 2(O - G) \Rightarrow 3G = 2O + C$$

$$\Rightarrow 3G = 2\left(\frac{A + B}{2}\right) + C \Rightarrow G = \frac{A + B + C}{3}$$

Pela definição 1.5.1, G é o próprio baricentro do triângulo.

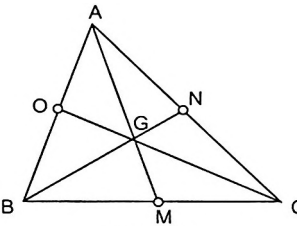


Figura 1.5.3 □

OBS.: Há quem defina baricentro apenas para triângulos como sendo diretamente o ponto de encontro de suas 3 medianas. Aqui preferimos definir baricentro de forma geral, e mostrar que o encontro das medianas coincide com o baricentro no caso do triângulo.

De qualquer forma, nos será muito útil lembrar que, sendo G o encontro das medianas do triângulo A, B, C, teremos a seguinte expressão:

$$G = \frac{A + B + C}{3}$$

Exemplo 1.5.d (IME – 2000) Sejam r, s e t três retas paralelas não coplanares no espaço. São marcados sobre r dois pontos A e A', sobre s os pontos B e B' e sobre t os pontos C e C' de modo que $\overline{AA'} = a$, $\overline{BB'} = b$ e $\overline{CC'} = c$ tenham o mesmo sentido.

a) Mostre que se G e G' são os baricentros dos triangulos ABC e A'B'C', respectivamente, então o segmento GG' é paralelo às 3 retas.
b) Determine o comprimento do segmento GG' em função de a, b, c.

Solução:

Sendo $\hat{u}$ o vetor unitário que dá a direção das 3 retas, podemos escrever:

$$\overline{AA'} = a \cdot \hat{u} \Rightarrow A' = A + a \cdot \hat{u} \qquad \text{(eq. I)}$$

$$\overline{BB'} = b \cdot \hat{u} \Rightarrow B' = B + b \cdot \hat{u} \qquad \text{(eq. II)}$$

$$\overline{CC'} = c \cdot \hat{u} \Rightarrow C' = C + c \cdot \hat{u} \qquad \text{(eq. III)}$$

Somando as 3 equações, e dividindo por 3 nos dois lados da equação resultante, teremos:

$$\frac{A' + B' + C'}{3} = \frac{A + B + C}{3} + \frac{a + b + c}{3} \cdot \hat{u}$$

Ou ainda, usando o resultado 1.5.3

$$G' = G + \frac{a + b + c}{3} \cdot \hat{u} \Rightarrow \overline{GG'} = \frac{a + b + c}{3} \cdot \check{u}$$

Ou seja, o segmento que une G e G' tem a mesma direção e sentido das 3 retas, e o comprimento do segmento é:

$$\boxed{\overline{GG'} = \frac{a + b + c}{3}}$$

OBS.: Esse é o típico exemplo de questões trabalhosas que são imensamente simplificadas com noções simples de vetores. Lembre-se que não é todo mundo que lembra de usar essa 'simples' saída para esse tipo de problema.

Incentro

É possível provar (ver Apêndice!) que as bissetrizes relativas aos 3 vértices de um triângulo se cruzam em um único ponto, chamado **Incentro**. A expressão das coordenadas do incentro I, de um triângulo de vértices A, B, C e lados opostos a, b, c, respectivamente, é dada por:

$$I = \frac{a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C}{a + b + c}$$

Resultado 1.5.4

Demonstração:

A concorrência das 3 bissetrizes de um triângulo em um único ponto, chamado Incentro, é demonstrada no Apêndice deste livro. Para a demonstração do resultado acima, usaremos também o **Teorema da Bissetriz Interna**.

Este teorema está também devidamente demonstrado na seção do Apêndice deste livro. Considere o triângulo abaixo, sem perda de generalização, e os segmentos:

$\overline{BA'} = m$, $\overline{A'C} = a - m$

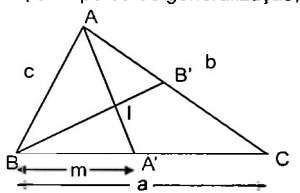


Figura 1.5.4

Sabemos que: $\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} = \frac{m}{a - m}$

Do Teorema das Bissetrizes internas, temos:

$$\frac{c}{m} = \frac{b}{a - m}$$

Logo: $$\frac{m}{a - m} = \frac{c}{b} \Rightarrow m = \frac{a \cdot c}{b + c} \qquad \text{(eq. I)}$$

E, também:

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} = \frac{c}{b} \Rightarrow A' - B = \left(\frac{c}{b}\right) \cdot (C - A')$$

Arrumando, chega-se a: $A' = \dfrac{c \cdot C + b \cdot B}{b + c}$ (eq. II)

Onde A' é a interseção da bissetriz relativa ao vértice A com o lado oposto b.

Note que I é a interseção da bissetriz relativa ao vértice B com o lado AA' do triângulo ΔAA'B. Logo, podemos escrever o mesmo resultado para este triângulo:

$$I = \frac{m \cdot A + c \cdot A'}{m + c} \qquad \text{(eq. III)}$$

Substituindo a equação II na equação III, lembrando que m pode ser escrito em função de a, b, c (equação I), tem-se:

$$I = \frac{m \cdot A + c\left(\dfrac{c \cdot C + b \cdot B}{b + c}\right)}{m + c} = \frac{\dfrac{a \cdot c}{b + c} A + c\left(\dfrac{c \cdot C + b \cdot B}{b + c}\right)}{\dfrac{a \cdot c}{b + c} + c} = \frac{a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C}{a + b + c} \square$$

Exincentro ou Excentro

Dado o mesmo triângulo proposto no resultado anterior, é possível provar (veja Apêndice) que a bissetriz interna de um de seus ângulos internos (Â, por exemplo) e as bissetrizes externas dos outros dois ângulos $\left(\hat{B} \text{ e } \hat{C}\right)$ se cruzam em um único ponto chamado **Exincentro Referente ao Lado Oposto a Â** $\left(\overline{BC}\right)$. As coordenadas desse ponto são também expressas de maneira parecida à do Resultado 1.5.4:

$$E_{\hat{A}} = \frac{-a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C}{-a + b + c}$$

Resultado 1.5.5

Demonstração:

A demonstração do resultado acima é pedida como exercício de fixação (exercício

Ortocentro

É possível provar (ver Apêndice!) que as alturas relativas aos 3 vértices de um triângulo se cruzam em um único ponto, chamado **Ortocentro**. A expressão das coordenadas do ortocentro H, de um triângulo de vértices A, B e C (não retângulo) é dada por

$$H = \frac{A \cdot tg\alpha + B \cdot tg\beta + C \cdot tg\gamma}{tg\alpha + tg\beta + tg\gamma}$$

Onde α, β, γ são os ângulos internos respectivamente correspondentes aos vértices A, B e C do triângulo.

Resultado 1.5.6

Demonstração:

Consideremos o triângulo **não retângulo** abaixo sem perda de generalização. Verificaremos que a afirmação acima continuará valendo para triângulos obtusos.

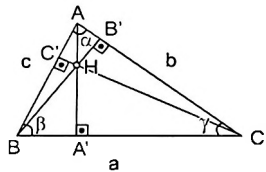


Figura 1.5.5

Da trigonometria nos seguintes triângulos retângulos contidos na figura acima:

$$\Delta BC'C: \quad \overline{CC'} = \overline{BC'} \cdot tg\beta$$

$$\Delta AC'C: \quad \overline{CC'} = \overline{C'A} \cdot tg\alpha$$

Logo: $\overline{BC'} = \left(\frac{tg\alpha}{tg\beta}\right) \cdot \overline{C'A}$

Com isso, temos: $C' - B = (A - C') \cdot \left(\frac{tg\alpha}{tg\beta}\right) \quad \therefore \quad C' = \frac{A \cdot tg\alpha + B \cdot tg\beta}{tg\alpha + tg\beta}$

Analogamente: $B' = \frac{A \cdot tg\alpha + C \cdot tg\gamma}{tg\alpha + tg\gamma}$, $A' = \frac{B \cdot tg\beta + C \cdot tg\gamma}{tg\beta + tg\gamma}$

Sendo m e n constantes reais, podemos escrever:

$$\begin{cases} \overline{AC'} = m \cdot \overline{AB} \\ \overline{AB'} = n \cdot \overline{AC} \end{cases}$$

Arrumando a primeira equação:

$$C' - A = m\cdot B - m\cdot A \Rightarrow \frac{A\cdot tg\alpha + B\cdot tg\beta}{tg\alpha + tg\beta} - A = m\cdot B - m\cdot A$$

$$\Rightarrow m\cdot B - B\cdot\frac{tg\beta}{(tg\alpha + tg\beta)} = m\cdot A - A + A\cdot\frac{tg\alpha}{(tg\alpha + tg\beta)}$$

$$\Rightarrow B\cdot\left(m - \frac{tg\beta}{(tg\alpha + tg\beta)}\right) = A\cdot\left(m - \frac{tg\beta}{(tg\alpha + tg\beta)}\right)$$

$$\Rightarrow m = \frac{tg\beta}{(tg\alpha + tg\beta)}$$

Analogamente: $$n = \frac{tg\gamma}{tg\alpha + tg\gamma}$$

Definindo os vetores linearmente independentes $\overline{AB} = \vec{v}$ e $\overline{AC} = \vec{u}$, temos, então:

$$\begin{cases} \overline{AC'} = \left(\dfrac{tg\beta}{tg\alpha + tg\beta}\right)\cdot\vec{v} \\ \overline{AB'} = \left(\dfrac{tg\gamma}{tg\alpha + tg\gamma}\right)\cdot\vec{u} \end{cases}$$

Sendo p e q constantes reais, podemos escrever:

$$\begin{cases} \overline{CH} = p\cdot\overline{CC'} \\ \overline{BH} = q\cdot\overline{BB'} \end{cases}$$

Da regra do polígono no triângulo BCH: $\overline{BH} - \overline{CH} = \overline{BC} = \vec{u} - \vec{v}$

Logo:

$$\Rightarrow q\cdot\overline{BB'} - p\cdot\overline{CC'} = \vec{u} - \vec{v}$$

$$\Rightarrow q(n\cdot\vec{u} - \vec{v}) - p(m\cdot\vec{v} - \vec{u}) = \vec{u} - \vec{v}$$

$$\Rightarrow (q\cdot n + p - 1)\cdot\vec{u} + (1 - m\cdot p - q)\cdot\vec{v} = \vec{0}$$

Como os vetores são linearmente independentes (vemos que eles são não paralelos), deveremos ter:

$$\begin{cases} q\cdot n + p - 1 = 0 \\ 1 - m\cdot p - q = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima para q e p:

$$\begin{cases} p = \dfrac{1 - n}{1 - m \cdot n} = \dfrac{1 - \left(\dfrac{tg\gamma}{tg\alpha + tg\gamma}\right)}{1 - \left(\dfrac{tg\beta}{tg\alpha + tg\beta}\right)\cdot\left(\dfrac{tg\gamma}{tg\alpha + tg\gamma}\right)} = \dfrac{tg\alpha + tg\beta}{tg\alpha + tg\beta + tg\gamma} \\ q = \dfrac{1 - m}{1 - m \cdot n} = \dfrac{1 - \left(\dfrac{tg\beta}{tg\alpha + tg\beta}\right)}{1 - \left(\dfrac{tg\beta}{tg\alpha + tg\beta}\right)\cdot\left(\dfrac{tg\gamma}{tg\alpha + tg\gamma}\right)} = \dfrac{tg\alpha + tg\gamma}{tg\alpha + tg\beta + tg\gamma} \end{cases}$$

Com isso, temos:

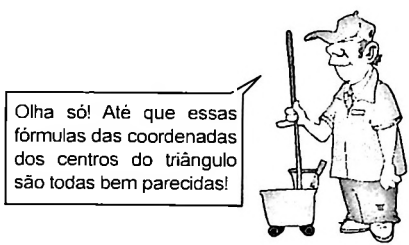
$$H - C = \left(\frac{tg\alpha + tg\beta}{tg\alpha + tg\beta + tg\gamma}\right)\cdot(C' - C)$$

Substituindo o valor de $C' = \dfrac{A \cdot tg\alpha + B \cdot tg\beta}{tg\alpha + tg\beta}$, demonstramos o que nos pedido:

$$H = C\left(1 - \frac{tg\alpha + tg\beta}{tg\alpha + tg\beta + tg\gamma}\right) + \left(\frac{\cancel{tg\alpha + tg\beta}}{tg\alpha + tg\beta + tg\gamma}\right)\cdot\frac{A \cdot tg\alpha + B \cdot tg\beta}{\cancel{(tg\alpha + tg\beta)}}$$

$$= \frac{A \cdot tg\alpha + B \cdot tg\beta + C \cdot tg\gamma}{tg\alpha + tg\beta + tg\gamma} \quad \square$$

OBS.: Verifique que a expressão continua válida para triângulos obtusos! Neste caso, uma das tangentes da expressão teria sinal negativo. Para triângulos retângulos, encontrar o ortocentro é uma tarefa trivial, uma vez que os catetos do triângulo são alturas, e com isso, o vértice do ângulo reto é o próprio ortocentro!



OBS.: Essas fórmulas, de fato, têm algo em comum. Todas representam médias ponderadas das coordenadas dos vértices do triângulo.

No caso do baricentro, é uma média simples (média ponderada com pesos iguais a 1)

$$G = \frac{A + B + C}{3}$$

O incentro é uma média ponderada com os comprimentos dos lados opostos aos respectivos vértices:

$$I = \frac{a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C}{a + b + c}$$

O ortocentro é uma média ponderada com as tangentes dos ângulos internos dos respectivos vértices:

$$H = \frac{A \cdot tg\alpha + B \cdot tg\beta + C \cdot tg\gamma}{tg\alpha + tg\beta + tg\gamma}$$

Embora ainda não demonstrada (será pedida como exercício de fixação mais adiante), a expressão do circuncentro é uma média ponderada com os senos dos dobros dos ângulos internos dos respectivos vértices:

$$C = \frac{A \cdot sen(2\alpha) + B \cdot sen(2\beta) + C \cdot sen(2\gamma)}{sen(2\alpha) + sen(2\beta) + sen(2\gamma)}$$

1.6. Produto Misto

Vistos os produtos escalar e vetorial, ainda existe um 3º tipo de produto envolvendo vetores que convém se estudar: o produto misto (também conhecido como produto **triplo**).

Definimos como produto misto entre os vetores: $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$

Definição 1.6.1

Notação do produto misto: $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$

Equação Matricial do Produto Misto

Sejam $\vec{u} = (x_u, y_u, z_u)$, $\vec{v} = (x_v, y_v, z_v)$ e $\vec{w} = (x_w, y_w, z_w)$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_w & y_w & z_w \end{vmatrix}$$

Resultado 1.6.1 – Equação Matricial do Produto Misto

Demonstração:

Escrevamos os vetores como combinação linear dos vetores da base canônica do R^3.

$$\vec{u} = x_u \cdot \hat{i} + y_u \cdot \hat{j} + z_u \cdot \hat{k};\ \vec{v} = x_v \cdot \hat{i} + y_v \cdot \hat{j} + z_v \cdot \hat{k};\ \vec{w} = x_w \cdot \hat{i} + y_w \cdot \hat{j} + z_w \cdot \hat{k};$$

Calculando

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_v & y_v & z_v \\ x_w & y_w & z_w \end{vmatrix} = (y_v \cdot z_w - z_v \cdot y_w,\ z_v \cdot x_w - x_v \cdot z_w,\ x_v \cdot y_w - y_v \cdot x_w)$$

Logo:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (x_u, y_u, z_u) \cdot (y_v \cdot z_w - z_v \cdot y_w,\ z_v \cdot x_w - x_v \cdot z_w,\ x_v \cdot y_w - y_v \cdot x_w)$$
$$= x_u \cdot y_v \cdot z_w - x_u \cdot z_v \cdot y_w + y_u \cdot z_v \cdot x_w - y_u \cdot x_v \cdot z_w + z_u \cdot x_v \cdot y_w - z_u \cdot y_v \cdot x_w$$
$$= \begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_w & y_w & z_w \end{vmatrix} \quad \square$$

Propriedades Importantes:

1. Permutar a ordem de 2 vetores no produto altera o sinal do resultado

$$\boxed{[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}]}$$

Resultado 1.6.2

Basta lembrar a propriedade de determinantes (trocando 2 linhas na matriz, altera o sinal do determinante).

2. Produto Misto com 2 dos 3 vetores sendo paralelos

$$\text{Se } \vec{u}//\vec{v} \text{ ou } \vec{u}//\vec{w} \text{ ou } \vec{v}//\vec{w} \Rightarrow [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$$

Resultado 1.6.3

Basta lembrar a propriedade de determinantes (se uma linha for múltipla da outra, o determinante é nulo).

Visão Geométrica do Produto Misto: Volume

Sejam os vetores $\vec{u},\vec{v}$ e $\vec{w}$. O módulo do produto misto entre esses 3 vetores dá o valor do volume do paralelepípedo formado pelos mesmos 3 vetores (ver figura 1.6.1)

Resultado 1.6.4

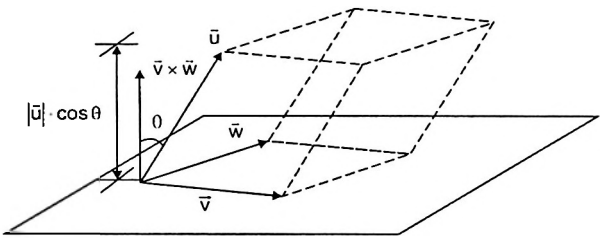


Figura 1.6.1

Demonstração:

$$\left|[\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}]\right| = \left|\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})\right| = \left|\left|\vec{u}\right|\cdot\left|(\vec{v}\times\vec{w})\right|\cdot\cos\theta\right|$$

$$= \left|\left|(\vec{v}\times\vec{w})\right|\cdot\left|\vec{u}\right|\cdot\cos\theta\right| = \text{Area da base} \times \text{altura} = \text{Volume} \quad \square$$

OBS.: O módulo é utlizado, pois dependendo da ordem dos vetores no produto misto, a orientação do produto vetorial na figura se inverte e o resultado acaba sendo negativo.

Um outro resultado interessante segue como consequência direta do resultado anterior. Geometricamente é facil perceber (figura 1.6.2) que o paralelepipedo formado pelos 3 vetores contém 6 tetraedros iguais com arestas laterais dadas pelos mesmos 3 vetores.

Sejam os vetores $\vec{u},\vec{v}$ e $\vec{w}$. O volume do tetraedro formado com arestas laterais dadas pelos 3 vetores é dado por:

$$V_{\text{tetraedro}} = \frac{1}{6}\left|[\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}]\right|$$

Resultado 1.6.5

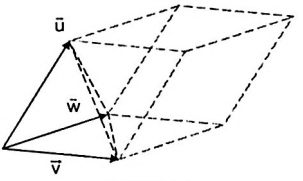


Figura 1.6.2

Além de tornar incrivelmente simples o cálculo do volume dessas figuras geométricas no espaço, conhecendo apenas seus vértices, os resultados anteriores geram também outras conclusões intrigantes.

Coplanaridade

Dizemos que 3 vetores são coplanares se os segmentos orientados por esses vetores pertencem a um mesmo plano no espaço. Sejam os vetores $\bar{u}, \bar{v}$ e $\bar{w}$ não-nulos:

$$[\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}] = 0 \Leftrightarrow \bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \text{ são coplanares}$$

Resultado 1.6.6

Demonstração:

Do **Resultado 1.6.4**, o módulo produto misto entre os 3 vetores nos dá o volume do paralelepípedo formado por eles. Se o produto misto é nulo, não há volume (2 vetores são paralelos e, portanto, os 3 vetores são coplanares; ou os 3 são não-paralelos mas coplanares). A volta é válida pela razão recíproca (se os 3 vetores são coplanares, então o volume formado pelos 3 é zero).

1.7. Exercícios de Fixação

Exercício 1.1 Considere os vetores $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ de módulos unitários. Se a soma vetorial destes mesmos vetores é nula, calcule a soma: $\bar{a} \cdot \bar{c} + \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{b} \cdot \bar{c}$.

Exercício 1.2 (EN-1985) Os vetores $\bar{a}$ e $\bar{b}$ são perpendiculares e $\bar{c}$ forma $\bar{a}$ e $\bar{b}$ com ângulos iguais a $\pi/3$ radianos. Se $\bar{a}$ e $\bar{c}$ são unitários, $|\bar{b}| = 2$ e, $\bar{p} = 3\bar{a} - \bar{b} + \bar{c}$, calcule o módulo do vetor $\bar{p}$.

Exercício 1.3 Demonstre que as diagonais de um paralelogramo se cruzam em seus pontos médios.

Exercício 1.4 Mostre que se M e N são os pontos médios dos lados $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ de um triângulo ABC, então $\overline{MN}$ é paralelo a $\overline{BC}$, e $\overline{MN} = \overline{BC}/2$.

Exercício 1.5 Considere que o quadrado ABCD. Sobre o lado CD constrói-se o triângulo equilátero CDE, com E localizado dentro do quadrado. Constrói-se ainda o triângulo equilátero BCF, com F localizado fora do quadrado. Mostre que A, E e F são colineares.

Exercício 1.6 Mostre que as 3 alturas de um triângulo qualquer se encontram em um único ponto (o ortocentro).

Exercício 1.7 ✍ Considere um triângulo ABC com A = (1,1), B = (3,6) e C = (6,2). Os pontos M e N pertencem, respectivamente aos lados AB e BC. Se P e Q pertencem a AC, determine o ponto Q sabendo que MNPQ é um quadrado.

Exercício 1.8 (EN) Se $|\vec{u}| = 3$ e $|\vec{v}| = 3$, calcule o valor máximo de $|\vec{u} + \vec{v}|$.

Exercício 1.9 (IME – 1987) Sobre os catetos AB e AC de um triângulo retângulo ABC constroem-se dois quadrados ABDE e ACFG. Mostre que os segmentos CD, BF e a altura AH são concorrentes em um ponto.

Exercício 1.10 (ITA -1995) Três pontos de coordenadas, respectivamente, (0, 0), (b, 2b) e (5b, 0), com b > 0, são vértices de um retângulo. Dê as coordenadas do quarto vértice em função de b.

Exercício 1.11 Mostre se $a \cdot X + b \cdot Y + c \cdot Z = 0$ para valores a, b, c tais que não sejam todos nulos ao mesmo tempo, e a + b + c = 0, então X, Y, Z são colineares.

Exercício 1.12 Mostre que 2 vetores não-paralelos no R^2 sempre formam uma base vetorial do R^2.

Exercício 1.13 Mostre que 3 vetores não coplanares no R^3 sempre formam uma base vetorial do R^3.

Exercício 1.14 ✍ Utilizando a Identidade de Lagrange (Exemplo 1.4.d), demonstre a Identidade de Jacobi

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) + \vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a}) + \vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{0}$$

Exercício 1.15 ✍ Considere a decomposição de um vetor u nas direções paralela e perpendicular a um outro vetor v, de modo que:

$$\vec{u} = \text{proj}_{\vec{v}}\vec{u} + \vec{u}_{\perp\vec{v}}$$

denota a componente perpendicular.

a) Mostre que: $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{u}_{\perp\vec{v}} \times \vec{v}$

b) Mostre que: $\vec{v}_{\perp\vec{v}} \times \vec{w}_{\perp\vec{v}} = (\vec{v} + \vec{w})_{\perp\vec{v}}$

c) Mostre que: $(\vec{v} + \vec{w}) \times \vec{u} = (\vec{v}_{\perp\vec{v}} \times \vec{w}_{\perp\vec{v}}) \times \vec{u}$

d) Mostre, geometricamente, que: $(\vec{v}_{\perp\vec{v}} \times \vec{w}_{\perp\vec{v}}) \times \vec{u} = \vec{v}_{\perp\vec{v}} \times \vec{u} + \vec{w}_{\perp\vec{v}} \times \vec{u}$

Utilize os resultados acima para concluir que, para o produto vetorial, vale a propriedade distributiva **(Resultado 1.4.3)**

Exercício 1.16 Os pontos A', B', C' dividem os lados BC, CA e AB em um triângulo, na razão m : n diferente de 1. Mostre que $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 0$.

Exercício 1.17 (IME –2003) Sobre uma reta r são marcados os pontos A, B, C e D. São construídos os triângulos eqüiláteros ABE, BCF e CDG, de forma que os pontos E e G se encontram do mesmo lado da reta r, enquanto que o ponto F se encontra do lado oposto, conforme mostra a figura. Calcule a área do triângulo formado pelos baricentros de ABE, BCF e CDG em função dos comprimentos dos segmentos AB, BC e CD.

Exercício 1.18 ✍ Considere o triângulo A, B, C não retângulo. Sejam P, Q, R os pontos médios de A, B e C, respectivamente.

a) Verifique que o circuncentro do triângulo ABC coincide com o ortocentro do triângulo PQR.
b) Use o item (a), bem como os resultados 1.5.3 e 1.5.6 para mostrar que, sendo H, G e N o ortocentro, baricentro e circuncentro do triângulo ABC, respesctivamente, então: $\overline{HG} = 2 \cdot \overline{GN}$.
c) Conclua do item (b) que H, G e N são colineares.

A reta H, G e N demonstrada neste exercício é conhecida como **Reta de Euler.**

Exercício 1.19 ✍ Mostre que as coordenadas do circuncentro C de um triângulo A, B e C (não-retângulo) podem ser escritas como:

$$C = \frac{A \cdot \text{sen}(2\alpha) + B \cdot \text{sen}(2\beta) + C \cdot \text{sen}(2\gamma)}{\text{sen}(2\alpha) + \text{sen}(2\beta) + \text{sen}(2\gamma)}$$

Sugestão: Use o resultado da questão anterior.

Exercício 1.20 ✍ Considere um triângulo de lados a, b, c, e vértices opostos com ângulos internos correspondentes a A, B, C, respectivamente. Sendo:

$$r = \frac{a}{\cos\hat{A}}, \quad s = \frac{b}{\cos\hat{B}}, \quad t = \frac{c}{\cos\hat{C}}$$

Demonstre que as coordenadas do ortocentro H deste triângulo é dada por:

$$H = \frac{r\cdot A + s\cdot B + t\cdot C}{r+s+t}$$

Exercício 1.21 ✍ **(Teorema de Pappus)** Uma reta que passa pelos pontos A_1, A_2 e A_3 intersecta outra reta que passa por B_1, B_2 e B_3 em um ponto O. Considere que A_2B_3 e A_3B_2 têm interseção em P_1; A_1B_3 e A_3B_1 têm interseção em P_2 e A_1B_2 e A_2B_1 têm interseção em P_3. Mostre que P_1, P_2 e P_3 são colineares.

Exercício 1.22 ✍ Demonstre a expressão das coordenadas do Exincentro enunciada no Resultado 1.5.5

$$E_{\hat{A}} = \frac{-a\cdot A + b\cdot B + c\cdot C}{-a+b+c}$$

Exercício 1.23 🙍 É dado o triângulo ABC e seja P um ponto sobre o lado BC. Mostre, usando vetores, a relação conhecida como **Relação de Stewart para Cevianas**:

$$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{BP}\cdot\overline{BC}} + \frac{\overline{AC}^2}{\overline{CP}\cdot\overline{CB}} - \frac{\overline{AP}^2}{\overline{PB}\cdot\overline{PC}} = 1$$

Exercício 1.24 Sejam os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ não-nulos. Mostre que:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0 \iff \vec{u}, \ \vec{v}, \ \vec{w} \text{ são linearmente dependentes}$$

Exercício 1.25 🙍 **(Balkan Math Olympiad)** Seja O o centro do círculo que passa pelos pontos A, B e C. Seja D o ponto médio de AB e E o baricentro do triângulo ACD. Prove que CD é perpendicular a OE se, e somente se, AB = AC.

Exercício 1.26 🙍 **(Teorema de Menelaus)** Considere um triângulo ABC e uma linha transversal que corta BC, AC e AB nos pontos D, E e F, respectivamente (com D, E, F distintos de A, B e C). Mostre que

$$\left(\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\right)\cdot\left(\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\right)\cdot\left(\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}\right) = 1$$

OBS.: A "volta" também é valida. Se D, E, F são pontos escolhidos sobre BC, AC e AB, respectivamente, tais que: $\left(\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\right)\cdot\left(\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\right)\cdot\left(\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}\right) = 1$, então D, E e F são colineares.

Exercício 1.27 ♀ **(Teorema de Ceva)** Considere um triângulo ABC e as cevianas AO, BO e CO, traçadas de cada vértice ao ponto comum O, no interior do triângulo, de modo a encontrar os lados opostos em D, E e F, respectivamente. Mostre que:

$$\left(\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\right)\cdot\left(\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\right)\cdot\left(\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}\right)=1$$

OBS.: A "volta" também é valida. Se D, E, F são pontos escolhidos sobre os lados BC, AC e AB, respectivamente, tais que: $\left(\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\right)\cdot\left(\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\right)\cdot\left(\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}\right)=1$, então as cevianas AD, BE, e CF são concorrentes em um ponto.

Exercício 1.28 ♀ Verifique que a área do triângulo do Exemplo 1.4.a pode também ser obtida da seguinte forma.

$$S=\frac{1}{2}\cdot|\Delta|$$

Onde Δ é obtido usando o algoritmo:

Linhas principais — Linhas secundárias

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}$$

1. Escrever as coordenadas em uma matriz do tipo 4 x 2, repetindo o primeiro vértice na última linha.
2. Multiplicar os elementos em diagonal, como indicado na figura ao lado, contabilizando os produtos das linhas primárias como positivos e os da linha secundária como negativos

$$\Delta = a_1\cdot b_2 + b_1\cdot c_2 + c_1\cdot a_2 - (a_2\cdot b_1 + b_2\cdot c_1 + c_2\cdot a_1)$$

Em seguida, mostre que o algoritmo pode ser estendido para qualquer polígono simples (não há cruzamentos entre os lados) de n lados no plano (R^2), montando o determinante com n + 1 linhas e duas colunas, repetindo sempre na ultima linha o primeiro vértice.

OBS.: É importante observar que a **ordem dos vértices importa**; primeiro deve-se plotar os pontos no plano pra ver em que ordem eles aparecem (o sentido pode ser tanto horário quanto anti-horário, mas a ordem é indispensável).

2 Estudo-da-Geometria-no-Plano-e-no-Espaço

2.1. Equação da Reta no Plano

Embora a palavra reta dispense definições para o leitor a esta "altura do campeonato", vamos defini-la a seguir:

Dados dois pontos A e B no plano, o conjunto de todos os pontos P no plano tais que $\overline{AB}$ seja paralelo a $\overline{AP}$ é definido como reta suporte do segmento AB. Denotaremos esta reta, a partir de agora, por reta(A,B).

Definição 2.1.1

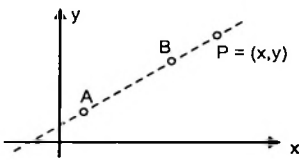


Figura 2.1.1

Sendo P um ponto (x, y), ele pertencerá à reta suporte do segmento AB (onde $A = (x_a, y_a)$ e $B = (x_b, y_b)$) quando:

$$\overline{AP} = t \cdot \left(\overline{AB}\right),\ t \in \mathbb{R}$$

Desenvolvendo:

$$P - A = t(B - A) \Rightarrow (x, y) - (x_a, y_a) = t\left((x_b, y_b) - (x_a, y_a)\right)$$

$$\Rightarrow (x - x_a,\ y - y_a) = t(x_b - x_a,\ y_b - y_a) \Rightarrow \begin{cases} x - x_a = t(x_b - x_a) \\ y - y_a = t(y_b - y_a) \end{cases}$$

Forma Paramétrica da Equação da Reta:

Dadas as coordenadas dos pontos $A = (x_a, y_a)$ e $B = (x_b, y_b)$, a equação da reta suporte de AB pode ser escrita como:

$$\begin{cases} x = x_a + t(x_a - x_b) \\ y = y_a + t(y_a - y_b) \end{cases},\ t \in \mathbb{R}$$

A variável t é um parâmetro que, ao variar nos Reais, faz com que (x,y) representem todos os pontos desta reta.

Definição 2.1.2

Note que poderiamos ter escolhido qualquer ponto da reta como sendo A. Além disso, os coeficientes que acompanham o parâmetro t nas equações paramétricas são as coordenadas de um vetor paralelo à reta. De modo que as equações paramétricas podem ser.

Dado um ponto A e um vetor $\bar{u} = (x_u, y_u)$ paralelo à reta, a equação da mesma pode ser escrita como:

$$\begin{cases} x = x_a + t \cdot x_u \\ y = y_a + t \cdot y_u \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

O vetor $\bar{u}$ é chamado de **Vetor Diretor** da reta. Como existem infinitos vetores paralelos a $\bar{u}$, existem infinitos vetores diretores para toda reta.

Definição 2.1.3

Além da forma paramétrica já citada, a equação da reta pode ser escrita de diversas outras formas. Tais formas representam apenas maneiras diferentes de escrever algebricamente a mesma equação da reta.

Por exemplo, isolando o parâmetro t na equação paramétrica da reta, chegamos a:

$$\frac{x - x_a}{x_b - x_a} = \frac{y - y_a}{y_b - y_a}$$

Arrumando de modo conveniente, a "equação da reta" possui o seguinte aspecto:

$$y = \underbrace{\left(\frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}\right)}_{m} \cdot x + \underbrace{\left(\frac{y_a \cdot x_b - y_b \cdot x_a}{x_b - x_a}\right)}_{h}$$

Onde m e h são constantes que dependem somente das coordenadas de A e B.

Forma Reduzida da Equação da Reta

Dada uma reta no plano, sua equação pode ser escrita algebricamente na forma:

$$y = m \cdot x + h$$

Denomina-se a constante **m** de **Coeficiente Angular** da reta, e a constante **h** de **Coeficiente Linear** da reta.

Definição 2.1.4

Representando a reta geometricamente no plano cartesiano, estas constantes m e h possuem interessante importância:

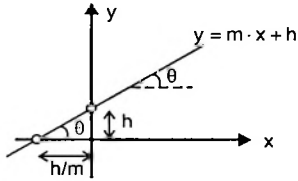


Figura 2.1.2

Fazendo y = 0 na equação reduzida da reta temos que h é a distância do ponto de cruzamento da reta com o eixo Ox até a origem. Se fizermos x = 0 temos a distância do ponto de interseção da reta com o eixo Oy até a origem.

$$tg\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{m \cdot x_2 - m \cdot x_1}{x_2 - x_1} = m \cdot \frac{\cancel{(x_2 - x_1)}}{\cancel{(x_2 - x_1)}} = m$$

Observe, portanto, que o coeficiente angular m representa a tangente do ângulo que a reta faz com a orientação positiva do eixo horizontal Ox. Em outras palavras, m é a inclinação da reta.

O coeficiente angular h representa o valor da ordenada y do ponto pertencente à reta, quando ela cruza o eixo x = 0. Em outras palavras, h é o ponto de cruzamento da reta com o eixo das ordenadas.

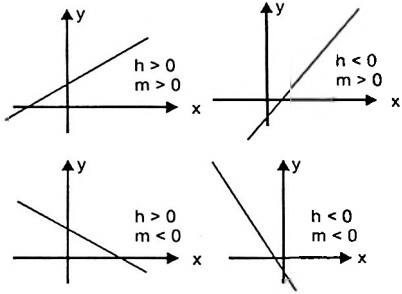


Figura 2.1.3

OBS.: As retas paralelas ao eixo y não possuem coeficiente angular, pois pela definição que usamos até o momento, sendo $A = (x_a, y_a)$ e $B = (x_b, y_b)$ pontos da reta:

$$m = \left(\frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} \right)$$

Se a reta é perpendicular ao eixo Ox (paralela ao eixo Oy), $x_b = x_a$, e, portanto, o valor de m não está definido.

Uma outra maneira de pensar é observar que o coeficiente angular é igual à tangente do *ângulo* que a reta faz com a orientação positiva do eixo horizontal. Se a reta é vertical, então m = tg(90°), que não é definido.

Forma Geral da Equação da Reta:

Dada uma reta no plano, sua equação pode ser escrita algebricamente na forma:

$$a \cdot x + b \cdot y + c = 0$$

Onde a, b, c são constantes.

Definição 2.1.5

A Forma Geral da equação da reta é interessante pois as constantes a e b que acompanham x e y, respectivamente, representam um vetor (a,b) **normal (ou perpendicular)** à reta. Note que:

$$(a, b) \perp \text{reta}(P_1, P_2) \Leftrightarrow (a, b) \perp (x - x_1,\ y - y_1)$$
$$\Leftrightarrow (a, b) \cdot (x - x_1,\ y - y_1) = 0 \Leftrightarrow a \cdot (x - x_1) + b \cdot (y - y_1) = 0$$
$$\Leftrightarrow a \cdot x + b \cdot y + \underbrace{(-a \cdot x_1 - b \cdot y_1)}_{c} = 0$$
$$\Leftrightarrow a \cdot x + b \cdot y + c = 0$$

Forma Segmentária:

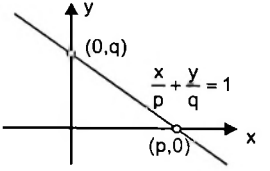
Dada uma reta no plano, não paralela aos eixos ordenadas e, que não passe pela origem, sua equação pode ser escrita algebricamente na forma:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

Onde p e q são constantes.

Definição 2.1.6

Sendo escrita desta forma, os valores dos denominadores que acompanham x e y são os pontos de interseção da reta com os eixos Ox e Oy, respectivamente.



Exemplo 2.1.a Dados os pontos A = (1,5) e B = (2,-3). Determine a equação da reta suporte do segmento AB nas formas Geral, Reduzida, Paramétrica e Segmentária. Determine ainda o coeficiente angular e o coeficiente linear da reta, bem como um vetor normal à mesma e um de seus vetores diretores.

Solução:

A tarefa de achar a equação da reta pode ser feita de diversas maneiras. Optemos por usar o **Resultado 1.4.7** Sendo P = (x,y) um ponto qualquer desta reta, devemos ter que A, B e P são colineares. Para isto, basta:

$$\begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Desenvolvendo: $-3 + 5x + 2y + 3x - y - 10 = 0$

Temos portanto a equação da reta na forma Geral:

$$8x + y - 13 = 0$$

(Forma Geral)

Arrumando temos a equação nas formas reduzida e segmentária:

$$\frac{x}{\frac{13}{8}} + \frac{y}{13} = 1$$

(Forma Segmentária)

$$y = -8x + 13$$

(Forma Reduzida)

Das discussões anteriores, temos que o coeficiente angular da reta é m = –8 e o coeficiente linear é **h = 13**. O vetor **(8, 1)** é um vetor normal à reta. Qualquer vetor paralelo a ele também o será.

Fazendo **x** = t, escrevemos a reta na forma paramétrica:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 13 - 8t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

(Forma Paramétrica)

O vetor **(1, –8)** é um vetor diretor à reta (Lembrando, da observação do resultado 1.3.5, que para determinarmos um vetor perpendicular a (8,1) bastariamos invertermos as posições das coordenadas e alterarmos o sinal de uma delas). Qualquer vetor paralelo a ele também o será.

Exemplo 2.1.b Considere a reta dada por $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$. Tal reta divide o plano do R^2 em dois semiplanos. Sejam $A = (x_a, y_a)$ e $B = (x_b, y_b)$ dois pontos distintos não pertencentes a reta. Mostre que:

Se $\frac{a \cdot x_a + b \cdot y_a + c}{a \cdot x_b + b \cdot y_b + c} > 0$, então A e B estão no mesmo semiplano.

Se $\frac{a \cdot x_a + b \cdot y_a + c}{a \cdot x_b + b \cdot y_b + c} < 0$, então A e B estão em semiplanos opostos.

Solução:

Considere P pertencente à reta dada, colinear a A e B. Note que se $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ tiverem o mesmo sentido, então A e B estarão no mesmo semiplano. Caso contrário, estarão em semiplanos opostos.

Da colinearidade:

$$\overline{PA} = k \cdot \overline{PB} \Rightarrow A - P = k \cdot B - k \cdot P$$

$$\Rightarrow P \cdot (k - 1) = k \cdot B - A \Rightarrow P = \left(\frac{k \cdot x_b - x_a}{k - 1}, \frac{k \cdot y_b - y_a}{k - 1} \right)$$

Como P pertence à reta:

$$a \cdot \left(\frac{k \cdot x_b - x_a}{k - 1} \right) + b \cdot \left(\frac{k \cdot y_b - y_a}{k - 1} \right) + c = 0$$

$$\Rightarrow k \cdot (a \cdot x_b + b \cdot y_b + c) - (a \cdot x_a + b \cdot y_a + c) = 0$$

$$\Rightarrow k = \frac{a \cdot x_a + b \cdot y_a + c}{a \cdot x_b + b \cdot y_b + c}$$

Se $\frac{a \cdot x_a + b \cdot y_a + c}{a \cdot x_b + b \cdot y_b + c} > 0$, teremos $k > 0$, e com isso, A e B estão no mesmo semiplano.

Se $\frac{a \cdot x_a + b \cdot y_a + c}{a \cdot x_b + b \cdot y_b + c} < 0$, teremos $k < 0$, e com isso, A e B estão em semiplanos opostos.

Distância entre dois Pontos no Plano

Dados dois pontos $A = (x_a, y_a)$ e $B = (x_b, y_b)$ no R^2, a distância entre eles é dada por:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$$

Demonstração:

A distância entre A e B é justamente o valor do módulo do vetor $\overline{AB}$

$$|\overline{AB}| = |B - A| = |(x_b - x_a,\ y_b - y_a)| = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}\ \square$$

Distância de um Ponto a uma Reta

Sejam dados um ponto $P = (x_0, y_0)$ e uma reta r em sua forma geral, $a{\cdot}x + b{\cdot}y + c = 0$, com constantes a, b, e c conhecidas. A distância do ponto P à reta r é dada por:

$$d(P,r) = \frac{|a{\cdot}x_0 + b{\cdot}y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Resultado 2.1.2

Demonstração:

Façamos primeiramente o caso da reta não ser paralela ao eixo Oy (isto é,b não é nulo)

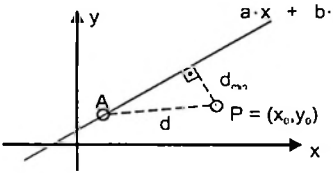


Figura 2.1.5

Seja $A = (x_a, y_a)$ um ponto qualquer da reta r. Temos, portanto:

$$a{\cdot}x_a + b{\cdot}y_a + c = 0 \Rightarrow y_a = -\frac{a}{b}x_a - \frac{c}{b}$$

A distância de P a A é dada por (Resultado 2.1.1):

$$d = \sqrt{(x_o - x_a)^2 + (y_o - y_a)^2} = \sqrt{(x_o - x_a)^2 + \left(y_o + \frac{a \cdot x_a}{b} + \frac{c}{b}\right)^2}$$

Nós buscamos o valor mínimo desta função, com variável x_a. Porém, sabemos que quando d for mínimo, d^2 também será mínimo (uma vez que a função $y(d) = d^2$ é estritamente crescente para $d > 0$). Este fato nos permite simplificar as contas, uma vez que agora buscamos minimizar a seguinte função:

$$f(x_a) = d^2 = (x_o - x_a)^2 + \left(y_o + \frac{a \cdot x_a}{b} + \frac{c}{b}\right)^2$$

Desenvolvendo f, temos:

$$f(x_a) = x_a^2 \cdot \left(1+\frac{a^2}{b^2}\right) + x_a \cdot \left(-2 \cdot x_0 + \frac{2 \cdot y_0 a}{b} + \frac{2 \cdot a \cdot c}{b^2}\right) + \left(x_0^2 + \left(y_0 + \frac{c}{b}\right)^2\right)$$

A função f trata-se de uma função do segundo grau com concavidade para cima. O ponto crítico dessa função é um ponto de mínimo. O valor mínimo será dado portanto pelo vértice da função do segundo grau:

$$f_{min} = \frac{-\Delta}{4\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)}$$

Desenvolvendo:

$$f_{min} = (d_{min})^2 = \frac{-\left(-2x_0 + \frac{2y_0 \cdot a}{b} + \frac{2a \cdot c}{b^2}\right)^2 + 4\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) \cdot \left(x_0^2 + \left(y_0 + \frac{c}{b}\right)^2\right)}{4\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)}$$

$$\Rightarrow (d_{min})^2 = \frac{-\left(-x_0 + \frac{y_0 \cdot a}{b} + \frac{a \cdot c}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{a^2 + b^2}{b^2}\right) \cdot \left(x_0^2 + \left(y_0 + \frac{c}{b}\right)^2\right)}{\left(\frac{a^2 + b^2}{b^2}\right)}$$

Desenvolvendo os produtos notáveis e cancelando devidamente, chega-se a:

$$(d_{min})^2 = \frac{2x_0 \cdot y_0 \cdot a \cdot b + 2x_0 \cdot a \cdot c + a^2 \cdot x_0^2 + b^2 \cdot y_0^2 + 2b \cdot c \cdot y_0 + c^2}{a^2 + b^2}$$

$$= \frac{a^2 \cdot x_0^2 + b^2 \cdot y_0^2 + c^2 + 2\left[(a \cdot x_0)(b \cdot y_0) + c(b \cdot y_0) + c(a \cdot x_0)\right]}{a^2 + b^2}$$

$$= \frac{(a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c)^2}{a^2 + b^2}$$

Como desejamos d_{min}:

$$d_{min} = \sqrt{\frac{(a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c)^2}{a^2 + b^2}} = \frac{|a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \square$$

Fica como **exercício** ao leitor verificar que esta expressão demonstrada também vale para retas paralelas ao eixo Oy.

Conhecendo dois pontos $A = (x_a, y_a)$ e $B = (x_b, y_b)$ de uma reta, a distância de um 3º ponto $P = (x_o, y_o)$ a esta reta é dada por:

$$d = \frac{\begin{Vmatrix} x_o - x_a & y_o - y_a \\ x_b - x_a & y_b - y_a \end{Vmatrix}}{\sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}}$$

Resultado 2.1.3

Demonstração: Estamos tratando de pontos e retas no plano (ou seja, no R^2). Nada nos impede de considerarmos o R^2 como sendo o plano $z = 0$ do R^3, por exemplo. Desta maneira, considere os mesmos pontos tratados no R^3:

$A = (x_a, y_a, 0)$, $B = (x_b, y_b, 0)$, $P = (x_o, y_o, 0)$

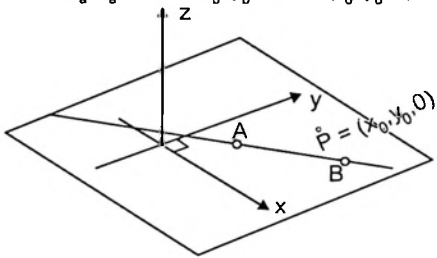


Figura 2.1.6

Considere o produto vetorial: $\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB}$. Da definição 1.4.1

$$\left|\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \underbrace{\left|\overrightarrow{AP}\right| \cdot \operatorname{sen}\theta}_{=d}$$

Logo:
$$d = \frac{\left|\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \frac{\begin{Vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_o - x_a & y_o - y_a & 0 \\ x_b - x_a & y_b - y_a & 0 \end{Vmatrix}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \frac{\left|\hat{k} \cdot \begin{vmatrix} x_o - x_a & y_o - y_a \\ x_b - x_a & y_b - y_a \end{vmatrix}\right|}{\sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} x_o - x_a & y_o - y_a \\ x_b - x_a & y_b - y_a \end{vmatrix}}{\sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}} \quad \square$$

Exemplo 2.1.c Determine a distância d entre o ponto $P = (1,1)$ e a reta suporte do segmento AB, onde $A = (2,3)$ e $B = (-1,7)$.

Solução: Usando o resultado 2.1.3:

$$d = \frac{\begin{Vmatrix} 1-2 & 1-3 \\ -1-2 & 7-3 \end{Vmatrix}}{\sqrt{(-1-2)^2 + (7-3)^2}} = \frac{\begin{Vmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 4 \end{Vmatrix}}{5} = \frac{|-10|}{5} = 2$$

Ângulo entre Duas Retas

Para determinarmos a posição de uma reta relativa a outra no plano, é interessante analisarmos o ângulo que elas fazem entre si.

Considere duas retas r_1 e r_2 dadas pelas equações não perpendiculares ao eixo das abcissas. Note o triângulo formado entre as duas retas.

$m_1 = tg\alpha_1, \quad m_2 = tg\alpha_2$

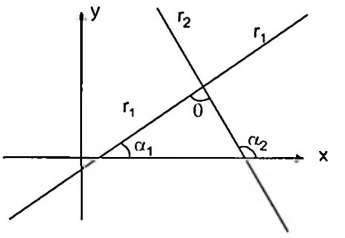


Figura 2.1.7

Do triângulo temos que: $\theta = \alpha_2 - \alpha_1 \quad \Rightarrow \quad tg\theta = tg(\alpha_2 - \alpha_1)$

Da trigonometria, conhecemos a tangente de uma subtração de arcos:

$$tg\theta = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_2} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}$$

Dependendo da orientação das retas, $\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}$ pode ser negativo.

Neste caso, estaríamos calculando a tangente de um ângulo obtuso entre as duas retas.

$$\theta_{agudo} + \theta_{obtuso} = \pi \quad \Rightarrow \quad tg(\theta_{agudo}) = -tg(\theta_{obtuso}) > 0$$

Para resolvermos o impasse, basta dizermos que, sendo θ o ângulo agudo entre as retas:

$$tg\theta = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} \right|$$

Com isso, podemos enunciar que:

Sejam duas retas r_1 e r_2 dadas pelas equações:

$$r_1: \quad y = m_1 \cdot x + h_1$$
$$r_2: \quad y = m_2 \cdot x + h_2$$

Se nenhuma das duas retas são perpendiculares ao eixo x, temos que o ângulo agudo entre elas é dado por:

$$\theta(r_1, r_2) = \operatorname{arctg}\left(\left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}\right|\right)$$

Resultado 2.1.4

Como consequência direta, se r_1 e r_2 são paralelas, então o ângulo entre elas é nulo.

$$r_1 \,//\, r_2 \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}\right| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m_1 = m_2$$

Se além de paralelas elas forem coincidentes, suas equações serão idênticas, e nesse caso teremos:

$$m_1 = m_2 \quad \text{e} \quad h_1 = h_2$$

Se r_1 e r_2 são perpendiculares, então a tangente do ângulo entre elas não existe.

$$r_1 \perp r_2 \quad \Rightarrow \quad 1 + m_1 \cdot m_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad m_1 \cdot m_2 = -1$$

Sejam duas retas r_1 e r_2 dadas pelas equações:

$$r_1: \quad y = m_1 \cdot x + h_1$$
$$r_2: \quad y = m_2 \cdot x + h_2$$

Então:

(1) r_1 e r_2 são paralelas e não coincidentes se e somente se $m_1 = m_2$ e $h_1 \neq h_2$.

(2) r_1 e r_2 são retas coincidentes se e somente se $m_1 = m_2$ e $h_1 = h_2$.

(3) r_1 e r_2 são perpendiculares se e somente se $m_1 \cdot m_2 = -1$.

Resultado 2.1.5

Exemplo 2.1.d Mostre que sendo r e s duas retas dadas, com vetores normais $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$, então o ângulo agudo entre elas é dado por:

$$\theta = \arccos\left(\frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}\right)$$

Solução:

A figura abaixo mostra que o ângulo entre as retas θ e o ângulo entre os vetores normais α podem ser relacionados:

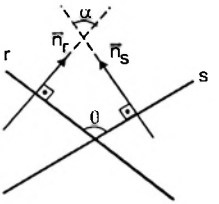


Figura I

Do quadrilátero formado entre os vetores normais e as duas retas:

$$\theta(r_1, r_2) + \alpha(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = 180^o \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = -\cos\alpha$$

Note que, se $\vec{n}_1$ fosse orientado no outro sentido, o ângulo entre os vetores normais seria expresso por: $\pi - \alpha$. Em todo caso, sendo θ o ângulo agudo entre as retas, teremos sempre que:

$$\cos\left(\theta(r_1,r_2)\right) = \left|\cos\left(\alpha(\vec{n}_1,\vec{n}_2)\right)\right|$$

Com isso, do produto escalar entre $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$:

$$|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2| = |\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2| \cdot \underbrace{|\cos\alpha|}_{\cos\theta} \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$

Exemplo 2.1.e Determine a equação da reta mediatriz do segmento definido por A = (1,5) e B = (–1, 3).

Solução: O coeficiente angular da reta suporte do segmento AB pode ser calculado:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2}{-2} = 1$$

A equação da mediatriz, por ser perpendicular a este segmento terá coeficiente angular calculado por:

$$m_{mediatriz} \cdot m_{AB} = -1 \quad \Rightarrow \quad m_{mediatriz} = -1$$

Como o ponto médio de AB = (A + B)/2 = (0,4) está reta:

$$y = -x + h \quad \Rightarrow \quad 4 = -0 + h \quad \therefore \quad h = 4$$

A equação da reta é, portanto: $\boxed{y = -x + 4}$

Exemplo 2.1.f Seja ABCD um retângulo variável de perímetro constante e igual a 2, com vértice D em (0,0). Os vértices A e C podem variar sobre os eixos y e x, respectivamente, de modo a atender à condição de perímetro constante. Prove que as perpendiculares a AC que passam por B possuem sempre um ponto fixo.

Solução: Como o perímetro é constante e vale 2, temos:

$$2a + 2b = 2 \quad \therefore \quad a + b = 1$$

Os coeficientes angular (m) e linear (h) da reta que passa por A e C são calculados por:

$$\begin{cases} m = \left(\dfrac{0 - b}{a - 0}\right) = -\dfrac{b}{a} \\ h = b \end{cases}$$

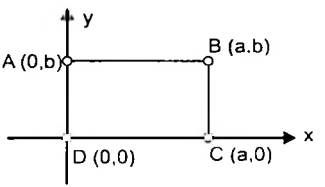


Figura I

A equação da reta que passa por A e C é:

$$y = m \cdot x + h \quad \Rightarrow \quad y = -\left(\frac{b}{a}\right) \cdot x + b$$

A reta perpendicular terá coeficiente angular calculado por:

$$m_{\perp} = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{\left(\dfrac{-b}{a}\right)} = \frac{a}{b} = \frac{a}{1 - a}$$

Como esta reta deve passar por B, sua equação será do tipo:

$$y = \left(\frac{a}{1-a}\right)x + h \quad \Rightarrow \quad b = \left(\frac{a}{1-a}\right)a + h \quad \Rightarrow \quad h = 1 - a - \frac{a^2}{1-a} = \frac{1 - 2a}{1 - a}$$

A equação da reta é, portanto:

$$y = \left(\frac{a}{1-a}\right) \cdot x + \frac{1 - 2a}{1 - a}$$

$$\Rightarrow \quad (1-a) \cdot y = a \cdot x + 1 - 2a \quad \Rightarrow \quad y - a \cdot y = a \cdot x + 1 - 2a$$

$$\Rightarrow \quad y - a \cdot y = a \cdot x - a + 1 - a \quad \Rightarrow \quad (y-1) - a \cdot (y-1) = a \cdot (x-1)$$

$$\Rightarrow \quad (y-1) \cdot (1-a) = a \cdot (x-1)$$

Independente do valor de a, x = 1 e y = 1 será solução da equação da reta acima. Ou seja, para todos os retângulos que atendam à condição do enunciado, as retas perpendiculares a AC que passam por B possuem o ponto fixo (1,1).

Posição de um Ponto em Relação a uma Reta

Uma reta no R^2 divide o plano em dois semiplanos. Determinar como vamos "chamar" cada um desses semiplanos é um desafio. Se a reta for horizontal, temos a tendência de dizer "semiplano de cima" e "semiplano de baixo". O mesmo acontece se a reta for vertical, quando temos a tendência natural de dizer "semiplano da direita" e "semiplano da esquerda". Já se a reta for inclinada, encontramos um pouco mais de dificuldade de nomeá-los!

Uma solução é considerar a função $f(x,y) = a \cdot x + b \cdot y + c$. Desta forma, para todo ponto $P = (x_0,y_0)$ pertencente à reta teremos:

$$f(x_0,y_0) = a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c = 0$$

Vejamos o resultado demonstrado no exemplo 2.1.b. Sendo $A = (x_a,y_a)$ e $B = (x_b,y_b)$ dois pontos não pertencentes à reta, tem-se:

Se $\dfrac{a \cdot x_a + b \cdot y_a + c}{a \cdot x_b + b \cdot y_b + c} > 0$, então A e B estão no mesmo semiplano.

Se $\dfrac{a \cdot x_a + b \cdot y_a + c}{a \cdot x_b + b \cdot y_b + c} < 0$, então A e B estão em semiplanos opostos.

Podemos verificar que se f(A) e f(B) tiverem o mesmo sinal, então A e B estão no mesmo semiplano com relação à reta f(x,y) = 0. Caso f(A) e f(B) possuírem sinais opostos, A e B estarão nos semiplanos opostos.

Seja a reta dada por $f(x,y) = a \cdot x + b \cdot y + c = 0$. Tal reta divide o plano do R^2 em dois semiplanos. Sejam $A = (x_a,y_a)$ e $B = (x_b,y_b)$.

Se $f(x_a,y_a)$ e $f(x_b,y_b)$ tiverem o mesmo sinal, então A e B estão no mesmo semiplano em relação à reta dada.

Se $f(x_a,y_a)$ e $f(x_b,y_b)$ tiverem o mesmo sinal, então A e B estão em semiplanos opostos em relação à reta dada.

Se $f(x_a,y_a) = 0$, então A está sobre a reta. O mesmo ocorre com B se $f(x_b,y_b) = 0$.

Resultado 2.1.6

Exemplo 2.1.g Destaque graficamente a região do plano R^2 formada pelo conjunto de pontos (x,y) que atendam a:

$$\begin{cases} y > 2x + 1 \\ y < -x + 3 \\ 3x > 1 - y \end{cases}$$

Em seguida, determine a área formada por esta região.

Solução: Considere as funções f, g e h tais que igualadas a zero nos dão as equações das retas que definirão a região pedida no enunciado:

$$\begin{cases} f(x,y) = y - 2x - 1 \\ g(x,y) = -x - y + 3 \\ h(x,y) = 3x + y - 1 \end{cases}$$

Desejamos saber os pontos do plano R^2 que tornam f, g, h positivas.

Note que o ponto (0,2) torna f positiva, pois $f(0, 2) = 2 - 2 \cdot 0 - 1 > 0$. Logo, do resultado 2.1.6 sabemos que todos os pontos no mesmo semiplano do ponto (0,2) em relação à reta $y - 2x - 1 = 0$ tornam f positiva.

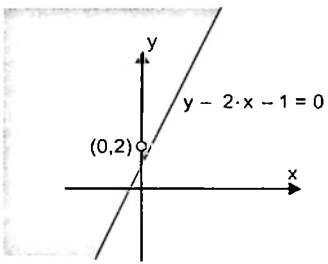
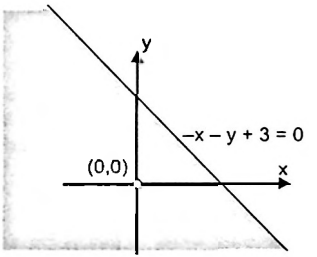


Figura I

Note agora que o ponto (0,0) torna g(x,y) positiva, pois $g(0,0) = -0 - 0 + 3 > 0$. Do resultado 2.1.6 sabemos que todos os pontos no mesmo semiplano do ponto (0,0) em relação à reta $-x - y + 3 = 0$ tornam g positiva.



O ponto (0,2) torna h(x,y) positiva, pois $h(0, 2) = 3 \cdot 0 + 2 - 1 > 0$. Do resultado 2.1.6 sabemos que todos os pontos no mesmo semiplano do ponto (0,2) em relação à reta $3 \cdot x + y - 1 = 0$ tornam h positiva.

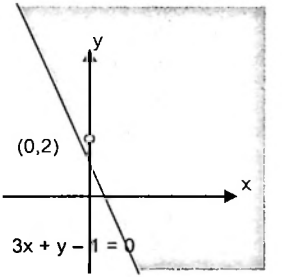


Figura III

A interseção destas 3 regiões pode ser encontrada geometricamente. Procuramos o conjunto de pontos que estão nas regiões hachuradas das figuras I, II e III ao mesmo tempo.

A região pedida se trata, portanto da região compreendida pelo triângulo cujos vértices são os pontos de interseção das 3 retas tomadas duas a duas. Tais pontos de interseção são:

$$P \in \begin{cases} y - 2x - 1 = 0 \\ -x - y + 3 = 0 \end{cases} \therefore \quad P = \left(\frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right)$$

$$Q \in \begin{cases} 3x + y - 1 = 0 \\ -x - y + 3 = 0 \end{cases} \therefore \quad Q = (-1, 4)$$

$$R \in \begin{cases} 3x + y - 1 = 0 \\ y - 2x - 1 = 0 \end{cases} \therefore \quad R = (0, 1)$$

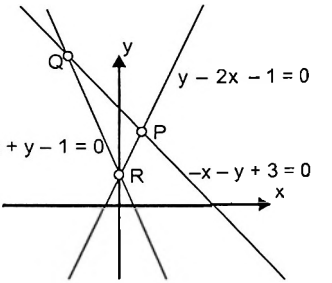


Figura IV

A área do triângulo PQR é dada por (veja Exemplo 1.4.a):

$$A_{PQR} = \frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} \frac{2}{3} & \frac{7}{3} & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2}\left|\frac{8}{3} - 1 - \frac{2}{3} + \frac{7}{3}\right| = \frac{10}{6}$$

$$\boxed{A_{PQR} = \frac{5}{3} \text{ u.a.}}$$

Equação da Bissetriz de um Ângulo.

Conforme definido na Geometria Euclidiana, a bissetriz é a reta que divide um dado ângulo em dois ângulos iguais (para duas retas não paralelas, existirá sempre um par de bissetrizes, que seguirão a definição). O par de bissetrizes relativo a duas retas não-paralelas poderia ser igualmente definida como o lugar geométrico dos pontos que equidistam de duas retas não paralelas, uma vez que esta propriedade decorre diretamente da definição)

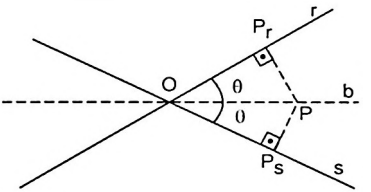


Figura 2.1.8 – A reta b é bissetriz, pois divide o ângulo formado pelas retas r e s em dois ângulos iguais.

Note na figura acima, que para qualquer ponto P da bissetriz b temos que a distância de P a r é igual à distância de P a s uma vez que os triângulos POP_r e POP_s serão sempre congruentes.

Sejam duas retas não paralelas r_1 e r_2 dadas pelas equações:

$$r_1: \quad a_1 \cdot x + b_1 \cdot y + c_1 = 0$$
$$r_2: \quad a_2 \cdot x + b_2 \cdot y + c_2 = 0$$

As equações das retas bissetrizes dos ângulos entre essas duas retas são dadas por:

$$\frac{a_1 \cdot x + b_1 \cdot y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2 \cdot x + b_2 \cdot y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \quad \square$$

Resultado 2.1.7

Demonstração: A demonstração do resultado acima segue diretamente da forma de definir a bissetriz como o lugar geométrico dos pontos P = (x,y) que equidistam de duas retas não paralelas. Usando o resultado 2.1.2:

$$d(P, r_1) = d(P, r_2) \quad \Rightarrow \quad \frac{|a_1 \cdot x + b_1 \cdot y + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \frac{|a_2 \cdot x + b_2 \cdot y + c_2|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

Retirando os módulos na igualdade acima, chegamos a:

$$\frac{a_1 \cdot x + b_1 \cdot y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2 \cdot x + b_2 \cdot y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \quad \square$$

Exemplo 2.1.h Considere os pontos A = (1,1) , B = (2,0) e C = (3,5). Determine a equação da bissetriz do ângulo agudo formado pelas retas suportes dos segmentos AB e AC.

Solução:

(r_1): Reta suporte do segmento AB: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + y - 2 = 0$

(r_2): Reta suporte do segmento AC: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2x + y + 1 = 0$

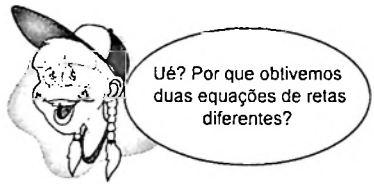
Do resultado 2.1.7, as equações das bissetrizes serão dadas por:

$$\frac{x + y - 2}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \pm \frac{-2x + y + 1}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2}}$$

Desenvolvendo chegamos a duas retas:

$$(b_1): \quad x \cdot \left(1 + \frac{2\sqrt{10}}{5}\right) + y \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{10}}{5}\right) - \left(2 + \frac{\sqrt{10}}{5}\right) = 0$$

$$(b_2): \quad x \cdot \left(1 - \frac{2\sqrt{10}}{5}\right) + y \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{10}}{5}\right) + \left(\frac{\sqrt{10}}{5} - 2\right) = 0$$



OBS.: Dadas duas retas r_1 e r_2, existem duas bissetrizes. Isto é, existem duas retas tais que seus pontos equidistam de r_1 e r_2. São exatamente estas duas retas que resultam do uso da expressão do Resultado 2.1.7.

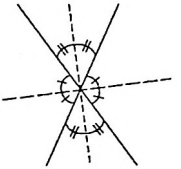


Figura 2.1.9

Sabemos que duas retas não paralelas formam 4 ângulos (em geral, 2 *ângulos obtusos iguais e 2 ângulos agudos iguais). Achando as equações* das retas bissetrizes usando o método que acabamos de citar, em muitos casos será também de interesse saber qual reta corresponde à bissetriz do *ângulo agudo, e qual corresponde à bissetriz do ângulo obtuso.*

Para resolver este impasse propomos a seguinte solução!

Escolhamos um ponto qualquer de uma das retas. Sabemos que o ponto (3,–1), por exemplo, pertence à reta r_1. Podemos calcular a distância deste ponto às duas retas bissetrizes encontradas:

$$\begin{cases} d_1 = \dfrac{\left|3\left(1+\dfrac{2\sqrt{10}}{5}\right)+(-1)\left(1-\dfrac{\sqrt{10}}{5}\right)-\left(2+\dfrac{\sqrt{10}}{5}\right)\right|}{\sqrt{\left(1+\dfrac{2\sqrt{10}}{5}\right)^2+\left(1-\dfrac{\sqrt{10}}{5}\right)^2}} = \dfrac{\dfrac{6\sqrt{10}}{5}}{\sqrt{\left(1+\dfrac{2\sqrt{10}}{5}\right)^2+\left(1-\dfrac{\sqrt{10}}{5}\right)^2}} \\ d_2 = \dfrac{\left|3\left(1-\dfrac{2\sqrt{10}}{5}\right)+(-1)\left(1+\dfrac{\sqrt{10}}{5}\right)+\left(\dfrac{\sqrt{10}}{5}-2\right)\right|}{\sqrt{\left(1-\dfrac{2\sqrt{10}}{5}\right)^2+\left(1+\dfrac{\sqrt{10}}{5}\right)^2}} = \dfrac{\dfrac{6\sqrt{10}}{5}}{\sqrt{\left(1-\dfrac{2\sqrt{10}}{5}\right)^2+\left(1+\dfrac{\sqrt{10}}{5}\right)^2}} \end{cases}$$

Note que d_1 e d_2 possuem o mesmo numerador, porém denominadores diferentes. Para descobrir qual das duas distâncias é a maior, compararemos os denominadores.

Logo:

$$\sqrt{\left(1+\frac{2\sqrt{10}}{5}\right)^2+\left(1-\frac{\sqrt{10}}{5}\right)^2} = \sqrt{4+\frac{2\sqrt{10}}{5}}$$

$$\sqrt{\left(1-\frac{2\sqrt{10}}{5}\right)^2+\left(1+\frac{\sqrt{10}}{5}\right)^2} = \sqrt{4-\frac{2\sqrt{10}}{5}}$$

E, com isso: $d_1 < d_2$

Como $d_1 < d_2$, temos que a bissetriz b_1 corresponde ao ângulo agudo, e b_2 ao ângulo obtuso formado por r_1 e r_2.

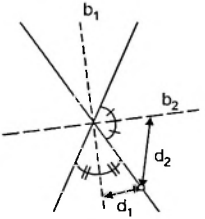


Figura I

Há ainda uma **segunda maneira** de verificar que b_1 trata-se da bissetriz relativa ao ângulo agudo. Deixamos ao leitor decidir qual é o método mais prático.

Note que descobrir que o ângulo BÂC é obtuso é simples!

$$\overline{AC} \cdot \overline{AB} = |\overline{AC}| \cdot |\overline{AB}| \cdot \cos(B\hat{A}C) \Rightarrow \cos(B\hat{A}C) = \frac{(2, 4) \cdot (1, -1)}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{2}} = \frac{-2}{2\cdot\sqrt{10}} < 0$$

Percebamos agora que uma das bissetrizes é bissetriz interna de Â no triângulo ABC e a outra é bissetriz externa. Com isso, determinando qual delas é a bissetriz externa, saberemos qual é a bissetriz do ângulo agudo!

Notemos que B e C estão no mesmo semiplano com relação à bissetriz externa, e em semiplanos opostos com relação à bissetriz interna.

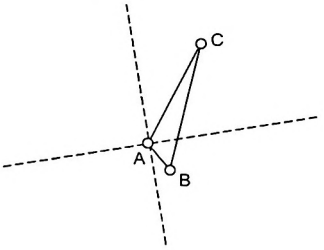


Figura II

Substituindo as coordenadas de B e de C na equação de b_1, temos:

$$B: \quad 2\left(1 + \frac{2\sqrt{10}}{5}\right) + 0\left(1 - \frac{\sqrt{10}}{5}\right) - \left(2 + \frac{\sqrt{10}}{5}\right) = \frac{3\sqrt{10}}{5} > 0$$

$$C: \quad 3\left(1 + \frac{2\sqrt{10}}{5}\right) + 5\left(1 - \frac{\sqrt{10}}{5}\right) - \left(2 + \frac{\sqrt{10}}{5}\right) = 6 > 0$$

Como os resultados destas substituições têm o mesmo sinal, B e C estão no mesmo semiplano com relação à b_1;

Logo, b_1 à bissetriz externa, e neste nosso caso, é a bissetriz relativa ao ângulo agudo!

Feixe (ou Família) de Retas

Uma equação paramétrica na qual variando o parâmetro obtemos diferentes equações de retas chama-se **feixe** ou **família** de retas.

Definição 2.1.7

Por exemplo, a equação paramétrica $y = x + t$, com t sendo um parâmetro real representa um feixe de retas paralelas (todas com coeficiente angular igual a 1).

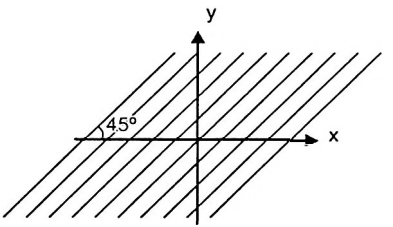


Figura 2.1.10

Igualmente uma equação paramétrica do tipo $y = 1 + t(x + 2)$ representa um feixe de retas concorrentes em um único ponto (note que para qualquer valor de t real o ponto (–2, 1) atenderá à equação.

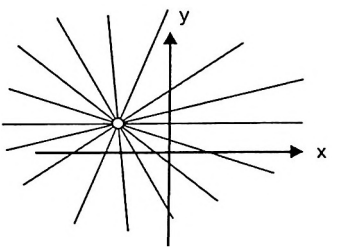


Figura 2.1.11

De maneira geral vamos definir estes dois tipos de feixes de retas a seguir.

Feixe de Retas Paralelas

Sendo m um valor fixo e t um parâmetro real, o feixe de retas paralelas (todas com coeficiente angular m) tem equação:

$$y = m \cdot x + t, \quad t \in \mathbb{R}$$

Resultado 2.1.8

Feixe de Retas Concorrentes em um Ponto

Sendo $P = (x_0, y_0)$ um ponto fixo no plano e t um parâmetro real, o feixe de retas que passam por P tem equação:

$$y - y_0 = t \cdot (x - x_0), \quad t \in \mathbb{R}$$

Resultado 2.1.9

O feixe de retas concorrentes em um único ponto possui ainda um segundo tipo de representação, ainda mais usual. Consideremos duas equações de retas cuja interseção ocorre em (α,β):

$$a \cdot x + b \cdot y + c = 0$$
$$d \cdot x + e \cdot y + f = 0$$

Se tomarmos a equação paramétrica $(a \cdot x + b \cdot y + c) + t \cdot (d \cdot x + e \cdot y + f) = 0$ esta será sempre atendida pelo ponto (α,β) pois:

$$(a \cdot \alpha + b \cdot \beta + c) + t \cdot (d \cdot \alpha + e \cdot \beta + f) = 0 + t \cdot 0 = 0$$

Variando o parâmetro t teremos várias equações de retas todas passando pelo ponto (α,β)! A equação proposta se trata, portanto, da equação de feixe de retas concorrentes.

Considerando as equações de retas

$$r_1 : a \cdot x + b \cdot y + c = 0 \quad \text{e} \quad r_2 : d \cdot x + e \cdot y + f = 0,$$

o feixe de retas concorrentes que passam pelo ponto de interseção entre r_1 e r_2 tem equação:

$$(a \cdot x + b \cdot y + c) + t \cdot (d \cdot x + e \cdot y + f) = 0, \quad t \in \mathbb{R}$$

O ponto de interseção mencionado é chamado **centro do feixe.**

Resultado 2.1.10

Exemplo 2.1.i Dê uma equação de feixe de retas perpendiculares à reta de equação $3x + y = 4$.

Solução:

Uma reta perpendicular a uma reta de coeficiente angular –3 terá coeficiente angular 1/3 (lembre-se, o produto dos coeficientes angulares de duas retas perpendiculares é igual a -1). Logo, a equação do feixe de retas pedido será:

$$\boxed{y = \frac{1}{3}x + t, \quad t \in \mathbb{R}}$$

Exemplo: 2.1.j Sejam a, b, c três inteiros ímpares consecutivos. Mostre que a reta $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$ passa sempre por um único ponto no plano e ache este o ponto.

Solução:

Tome $a = 2n - 1$, $b = 2n + 1$ e $c = 2n + 3$ (n inteiro) de forma que representem três inteiros ímpares consecutivos.

$$\begin{aligned} a \cdot x + b \cdot x + c = 0 \quad &\Rightarrow \quad (2n - 1) \cdot x + (2n + 1) \cdot y + (2n + 3) = 0 \\ &\Rightarrow \quad (2n - 1) \cdot x + (2n + 1) \cdot y + (2n + 3) = 0 \\ &\Rightarrow \quad n \cdot (2x + 2y + 2) + (-x + y + 3) = 0 \end{aligned}$$

A equação acima representa um feixe de retas concorrentes e, portanto, a reta $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$ passará sempre pelo centro do feixe.

Para achar o centro do feixe basta encontrarmos o ponto de encontro de duas retas pertencentes ao feixe:

$$\begin{aligned} n = 0 \quad &\Rightarrow \quad -x + y + 3 = 0 \\ n = 1 \quad &\Rightarrow \quad x + 3y + 5 = 0 \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema acha-se o centro do feixe:

$$\boxed{C = (1,-2)}$$

Exemplo 2.1.k Determinar a reta do feixe $x + y - 1 + t \cdot (x - y + 5) = 0$ que passa pela origem.

Solução:

Sabemos que todas as retas do feixe passam pelo seu centro. Novamente, para acharmos o centro do feixe basta encontrarmos o ponto de encontro de duas retas pertencentes a ele.

$$\begin{aligned} t = 0 \quad &\Rightarrow \quad x + y - 1 = 0 \\ t = 1 \quad &\Rightarrow \quad 2x + 4 = 0 \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema acha-se o centro do feixe: C = (–2, 3). A reta que passa pela origem será definida, portanto pelos pontos O = (0,0) e C = (–2,3).

Queremos, portanto, a equação da reta que passa pelos pontos (-2,3), (0,0). Só para variar um pouco (e para aprendermos mais um truque super útil!), vamos aplicar o algoritmo do Exercício de Fixação 1.28. Considerando que um ponto (x,y) deve pertencer à reta, temos que, a área formada pelo triângulo cujos vértices são (-2,3,), (0,0) e (x,y) deve ser nula:

A equação da reta pode ser encontrada da seguinte maneira:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 3 \\ x & y \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0\cdot 3 - 2y + x\cdot 0 - (-2\cdot 0) - 3x - y\cdot 0 = 0 \quad \therefore \quad \boxed{2y + 3x = 0}$$

Exemplo 2.1.I Determinar a reta do feixe $x + y - 1 + t(x - y + 5) = 0$ que é paralela à reta $y = 2x + 1$.

Solução:

O feixe dado nesta questão é idêntico ao feixe dado no exemplo anterior cujo centro é C = (–2, 3). Dentre todas as retas do feixe, deseja encontrar aquela que tem coeficiente angular igual a 2

Usando o resultado 2.1.9:

$$(y + 2) = 2(x - 3) \quad \therefore \quad \boxed{y = 2x - 8}$$

2.2. Equação da Circunferência

Dado um ponto C, o conjunto de todos os pontos P no plano tais que a distância de P a C seja constante valendo R é definido como **circunferência** de centro C e raio R.

Definição 2.2.1

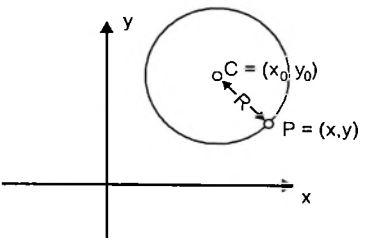


Figura 2.2.1

Sendo C = (x_0,y_0) e P um ponto (x,y). Da definição de circunferência de centro C e raio R:

$$|\overline{PC}| = R \Leftrightarrow \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R \Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

Equação Reduzida da Circunferência

A equação da circunferência centrada em (x_0,y_0) e raio R é:

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$$

Resultado 2.2.1

Vamos desenvolver a equação da circunferência:

$$x^2 - 2x \cdot x_0 + x_0^2 + y^2 - 2y \cdot y_0 + y_0^2 = R^2$$

Chamando: $a = -2x_0$, $b = -2y_0$, $c = x_0^2 + y_0^2 - R^2$, teremos:

$$x^2 + y^2 + a \cdot x + b \cdot y + c = 0$$

Para determinarmos as 3 constantes a, b e c da equação acima precisaremos de pelo menos 3 pontos da circunferência.

Na verdade, dados três pontos A, B, C não-colineares, definindo um triângulo no plano, a circunferência que passará por estes pontos será justamente a circunferência que circunscreve o triângulo, e seu centro será o **circuncentro** do triângulo ABC.

Exemplo 2.2.a Determine a equação da circunferência que passa pelos pontos A = (1,3), B = (0,8) e C = (0,0).

Solução:

A circunferência pedida é justamente a circunferência circunscrita ao triângulo ABC. O seu centro será, portanto, o circuncentro do triângulo ABC, ou seja, o encontro das mediatrizes do triângulo ABC.

Sendo P o ponto médio do segmento AB: $P = \frac{A + B}{2} = \left(\frac{1}{2}, \frac{11}{2}\right)$

A mediatriz do segmento AB terá equação portanto:

$$y - \frac{11}{2} = \underbrace{\left(-\frac{1}{m_{AB}}\right)}_{-\frac{1}{5}} \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow 5y = x + 27$$

Sendo Q o ponto médio do segmento AC: $Q = \frac{A + C}{2} = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

A mediatriz do segmento AC terá equação:

$$y - \frac{3}{2} = \underbrace{\left(-\frac{1}{m_{AC}}\right)}_{=-\frac{1}{3}} \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow 3y = -x + 5$$

O circuncentro será o ponto de encontro destas duas equações:

$$\begin{cases} 5y = x + 27 \\ 3y = -x + 5 \end{cases} \Rightarrow \text{circuncentro} = O = (4, -7)$$

O raio desta circunferência será a distância do circuncentro a um dos vértices do triângulo ABC.

$$R = |\overline{OC}| = |C - O| = |(-4, 7)| = \sqrt{(-4)^2 + (7)^2} = \sqrt{65}$$

A equação da circunferência é portanto:

$$\boxed{(x-4)^2 + (y+7)^2 = 65}$$

Exemplo 2.2.b Determine o lugar geométrico definido pela equação

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 4$$

Solução: Da equação dada vamos completar quadrados perfeitos:

$$x^2 - 2x + \underline{1} + y^2 + 4y + \underline{4} = 4 + \underline{1} + \underline{4}$$

$$\Rightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 3^2$$

A equação dada representa uma circunferência centrada em (1,–2) e raio 3.

Exemplo 2.2.c (IME – 1989) Dada a equação:

$$x^2 + y^2 - 2m \cdot x - 4(m + 1) \cdot y + 3m + 14 = 0$$

a) Determine os valores de m para que esta equação corresponda a uma circunferência.
b) Determine o lugar geométrico dos centros destas circunferências.

Solução:

a) Completando quadrados chega-se a forma reduzida da equação da circunferência:

$$(x - m)^2 + (y - 2(m + 1))^2 = \underbrace{5m^2 + 5m - 10}_{>0}$$

Para que esta equação corresponda, de fato, a uma circunferência, é necessário que o raio seja um valor real positivo:

$$R^2 = 5m^2 + 5m - 10 > 0$$

Logo:

$$\begin{aligned} R^2 = 5m^2 + 5m - 10 > 0 &\Leftrightarrow m^2 + m - 2 > 0 \\ &\Leftrightarrow (m + 2)\cdot(m - 1) > 0 \\ &\Leftrightarrow m < -2 \text{ ou } m > 1 \end{aligned}$$

A equação representará circunferências para os valores de m tais que:

$$\boxed{m < -2 \text{ ou } m > 1}$$

b) O centro da circunferência terá coordenadas: $\begin{cases} x = m \\ y = 2(m + 1) \end{cases}$

Eliminando o parâmetro m, temos que o L.G. dos centros da circunferências será uma reta de equação:

$$y = 2x + 2$$

Equação de uma Reta

Deverão ser excluídos os pontos do segmento de extremos (–2, –2) e (1,4) do L.G. acima para que a condição do item (a) seja atendida.

Posições Relativas entre uma Circunferência e uma Reta

Dadas uma circunferência e uma reta no plano a interseção entre elas virá da solução de um sistema do tipo:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + m\cdot x + n\cdot y + p = 0 \\ a\cdot x + b\cdot y + c = 0 \end{cases}$$

Substituindo a 2ª equação na 1ª obteremos uma equação do segundo grau que poderá ter zero, uma ou duas raízes reais, dependendo de seu discriminante.

$\Delta = 0 \Rightarrow$ Uma única interseção
$\Delta > 0 \Rightarrow$ Duas interseções
$\Delta < 0 \Rightarrow$ Não há interseção

Geometricamente isto se traduz na existência de três tipos de posições relativas entre uma reta e uma circunferência no plano. Nas figuras a seguir seja d a distância do centro da circunferência de raio R à reta.

Reta Tangente à *circunferência*

$\Delta = 0$

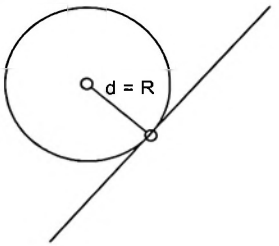


Figura 2.2.2

Neste caso note que a distância do centro da circunferência à reta é igual ao raio da circunferência.

Reta secante à *circunferência*

$\Delta > 0$

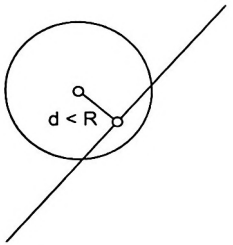
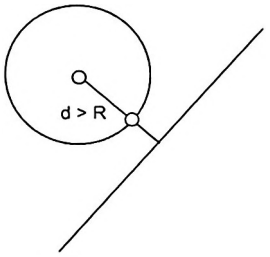


Figura 2.2.3

Neste caso note que a distância do centro da circunferência à reta é menor que o raio da circunferência.

Reta externa à *circunferência*

$\Delta < 0$



Neste caso note que a distância do centro da circunferência à reta é maior que o raio da circunferência.

Equações Paramétricas da Circunferência

As equações paramétricas a seguir representam uma circunferência de raio R e centro (x_0, y_0).

$$\begin{cases} x = x_o + R \cdot \text{sen}t \\ y = y_o + R \cdot \cos t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

Resultado 2.2.2

Demonstração: Isolando o parâmetro t, escrevemos:

$$\begin{cases} \text{sen}t = \dfrac{x - x_0}{R} \\ \cos t = \dfrac{y - y_0}{R} \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

Da relação fundamental da trigonometria sabemos que:

$$\text{sen}^2 t + \cos^2 t = 1 \Rightarrow \left(\frac{x - x_0}{R}\right)^2 + \left(\frac{y - y_0}{R}\right)^2 = 1 \Rightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

As equações paramétricas dadas representam portanto uma circunferência de raio R e centrada em (x_0, y_0). □

OBS.: Para cada valor de t teremos um ponto da circunferência. Variando t entre 0 e 2π já é suficiente para dar uma volta completa sobre a circunferência. Se limitarmos o domínio de t a um intervalo de comprimento menor que 2π. Estaremos representando um arco de circunferência.

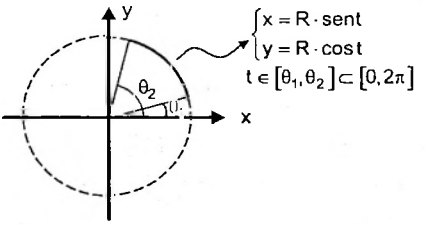


Figura 2.2.5

Exemplo 2.2.d Considere a circunferência dada por:

$$\begin{cases} x = 1 + 2 \cdot \text{sent} \\ y = 2 \cdot \cos t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

a) Verifique que a reta $y = 2 \cdot x - 4$ é secante à circunferência.
b) Determine o comprimento da corda definida pela reta do item (a) e a circunferência dada.

Solução:

a) A equação da circunferência dada $(x-1)^2 + y^2 = 4$.

Note que a distância do centro (1,0) da circunferência à reta $y = 2 \cdot x - 4$ é menor que o raio da circunferência:

$$\frac{|0 - 2 \cdot 1 + 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} < \text{Raio} = 2$$

Logo a reta é secante à circunferência.

b) Considere o esquema a seguir.

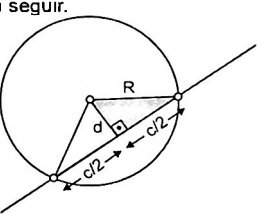


Figura I

Do teorema de Pitágoras no triângulo hachurado:

$$d^2 + \frac{c^2}{4} = R^2 \Rightarrow \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + \frac{c^2}{4} = 4 \Rightarrow \boxed{c = \frac{8\sqrt{5}}{5}}$$

Reta Tangente a uma Circunferência

Equação da Reta Tangente à Circunferência:

Considere a circunferência dada a seguir e o ponto $P = (x_0, y_0)$, pertencente à circunferência:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

A equação da reta tangente à circunferência em P, pertencente à circunferência, é dada por:

$$(x_0) \cdot x + (y_0) \cdot y = R^2$$

Demonstração:

Vamos demonstrar que o resultado acima vale para as tangentes não verticais, primeiro. Uma reta não vertical qualquer pode ser representada por $y = m \cdot x + h$. Como P pertence à reta, temos:

$$y_0 = m \cdot x_0 + h \Rightarrow h = y_0 - m \cdot x_0$$

O sistema abaixo nos dá as interseções da circunferência e da reta:

$$\begin{cases} y = m \cdot (x - x_0) + y_0 \\ x^2 + y^2 = R^2 \end{cases}$$

Para que a reta seja tangente, a solução do sistema deve ser única!

$$x^2 + \left(m \cdot (x - x_0) + y_0\right)^2 = R^2$$

$$\Rightarrow x^2 + \left(m^2 \cdot (x - x_0)^2 + 2m \cdot (x - x_0) \cdot y_0 + y_0^2\right) = R^2$$

$$\Rightarrow x^2 \cdot \left(1 + m^2\right) + x \cdot \left(2m \cdot (y_0 - m \cdot x_0)\right) + (y_0 - m \cdot x_0)^2 - R^2 = 0$$

A solução desta equação do 2º grau deve ser única! Poderíamos, neste momento, calcular o discriminante da equação acima e obrigá-lo a ser nulo. Vamos optar por um outro caminho.

A equação é do segundo grau, que só pode ter uma única solução. Mas conhecemos esta solução! Trata-se de $x = x_0$. Podemos dizer então que:

$$x^2 \cdot \left(1 + m^2\right) + x \cdot \left(2m \cdot (y_0 - m \cdot x_0)\right) + (y_0 - m \cdot x_0)^2 - R^2 \equiv \left(1 + m^2\right) \cdot (x - x_0)^2$$

Da identidade:

$$\begin{cases} -2 \cdot \left(1 + m^2\right) \cdot x_0 = 2m \cdot y_0 - 2m^2 \cdot x_0 \\ \left(1 + m^2\right) \cdot x_0^2 = (y_0 - m \cdot x_0)^2 - R^2 \end{cases}$$

Desenvolvendo a primeira equação resultante da identidade de Polinômios acima, temos:

$$m = -\frac{x_0}{y_0}$$

OBS.: Note que, como assumimos que a reta é não-vertical, o ponto de tangência não é tal que y_0 seja nulo, fazendo com que m acima exista.

Como a reta contém o ponto $P = (x_0, y_0)$:

$$y_0 = \left(-\frac{x_0}{y_0}\right) \cdot x_0 + h \Rightarrow h = y_0 + \frac{x_0^2}{y_0} = \frac{1}{y_0} \cdot \underbrace{\left(y_0^2 + x_0^2\right)}_{=R^2} = \frac{R^2}{y_0}$$

Com isso, temos que a equação da reta tangente é dada por:

$$y = \left(-\frac{x_0}{y_0}\right) \cdot x + \frac{R^2}{y_0} \quad \therefore \quad y \cdot y_0 + x \cdot x_0 = R^2 \quad \square$$

OBS.: A demonstração foi feita para retas não-verticais. No entanto, a demonstração para as tangentes verticais $x = +R$ e $x = -R$ é trivial.

Exemplo 2.2.e Determine as equações das retas que passam por (4,2) e são tangentes à circunferência de equação $x^2 + y^2 = 4$. Em seguida, determine os respectivos pontos de tangência.

Solução:

Graficamente é fácil perceber que as retas pedidas são não-verticais. Uma equação de reta não-vertical passando por (4,2) será do tipo: $y - 2 = m \cdot (x - 4)$.

Para que a reta seja tangente, a distância do centro (0,0) da circunferência à reta deverá valer o raio da circunferência.

$$R = 2 = \frac{|0 - 2 - m \cdot (0 - 4)|}{\sqrt{(-m)^2 + 1^2}} \Rightarrow \frac{|2m - 1|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 1$$

Elevando ao quadrado chegamos a:

$$3m^2 - 4m = 0 \Rightarrow m = 0 \text{ ou } m = \frac{4}{3}$$

As equações das retas tangente que passam por (4,2) são:

$$y - 2 = 0 \quad \text{e} \quad y - 2 = \frac{4}{3}(x - 4)$$

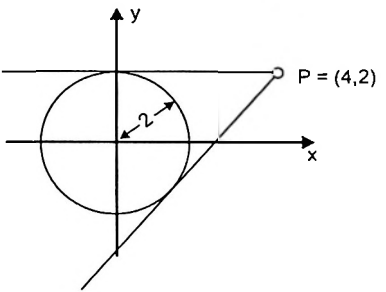


Figura I

Arrumando temos as equações das retas pedidas:

$$\boxed{\begin{array}{c} y = 2 \\ 4x - 3y - 10 = 0 \end{array}}$$

Deixando estas equações na forma $y \cdot y_0 + x \cdot x_0 = R^2$:

$$\begin{cases} 0 \cdot x + 2y = 4 \\ \left(\frac{8}{5}\right) x + \left(-\frac{6}{5}\right) \cdot y = 4 \end{cases}$$

Os respectivos pontos de tangência são, usando o resultado 2.2.3:

$$\boxed{(0,2) \text{ e } \left(\frac{8}{5}, -\frac{6}{5}\right)}$$

Exemplo 2.2.e Determine as equações das retas que passam por (2,5) e são tangentes à circunferência de equação $x^2 + y^2 = 4$. Em seguida, determine os respectivos pontos de tangência.

Solução: O exercício parece ser exatamente análogo ao anterior. Uma equação de reta passando por (2,5) seria do tipo: $y - 5 = m \cdot (x - 2)$.

Para que a reta seja tangente, a distância do centro (0,0) da circunferência à reta deverá valer o raio da circunferência.

$$R = 2 = \frac{|0 - 5 - m \cdot (0 - 2)|}{\sqrt{(-m)^2 + 1^2}} \Rightarrow \frac{|2m - 5|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 2$$

Elevando ao quadrado chegamos a:

$$4m^2 - 20m + 25 = 4m^2 + 4 \Rightarrow m = \frac{21}{20}$$

Com isso, encontramos o coeficiente angular, e portanto, a equação de apenas UMA reta tangente. E a outra? Não deveriam ser duas retas tangentes à circunferência, passando por um ponto exterior?

Repare que deixamos de perceber que uma das tangentes à circunferência $x^2 + y^2 = 4$, passando por (2,5) será obrigatoriamente a vertical $x = 2$. Ou seja, nossa premissa de que a equação assume a forma $y - 5 = m \cdot (x - 2)$ não abrange este caso!

As equações das retas tangentes são, portanto:

$$\boxed{\begin{array}{c} x = 2 \\ y - 5 = \frac{21}{20}(x - 2) \end{array}}$$

Para encontrar os pontos de tangência, poderíamos recorrer ao método anterior (neste caso, arrumar a segunda equação dá um pouco mais de trabalho). Um segundo método seria resolver os sistemas abaixo:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x = 2 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y - 5 = \frac{21}{20}(x - 2) \end{cases}$$

De onde, seguem os pontos: $\boxed{(2,\ 0) \quad \text{e} \quad \left(-\frac{42}{29},\ \frac{40}{29}\right)}$

Exemplo 2.2.g Determine a equação da reta do feixe $2x + y = c$ que tangencie a circunferência $x^2 + y^2 = 1$ e em seguida o ponto de tangência.

Solução:

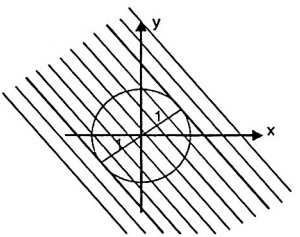


Figura I

Para que haja tangência, a distância do centro (0,0) à reta deverá ser igual ao raio da circunferência.

$$\frac{|2 \cdot 0 + 0 - c|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = 1 \quad \Rightarrow \quad c = \pm\sqrt{5}$$

Existem, portanto, duas retas do feixe que tangenciam à circunferência dada.

$$\boxed{\begin{array}{l} 2x + y = \sqrt{5} \\ 2x + y = -\sqrt{5} \end{array}}$$

Vamos alterar a equação destas retas para ficarem da forma $y \cdot y_0 + x \cdot x_0 = R^2$:

$$\begin{cases} \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \cdot x + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \cdot y = 1 \\ \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \cdot x + \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) y = 1 \end{cases}$$

Os respectivos pontos de tangência são, usando o resultado 2.2.3:

$$\boxed{\pm\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}$$

Potência de um Ponto Relativa a uma Circunferência

Seja P um ponto qualquer num plano, distando d do centro de uma circunferência C de raio R. Define-se **potência do ponto** P com relação à circunferência C pela expressão:

$$\boxed{\text{Pot}_C(P) = d^2 - R^2}$$

Definição 2.2.2

Considere a equação de uma circunferência C expressa de forma genérica:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - R^2 = 0$$

Observe o lado esquerdo da equação acima. Se substituirmos P = (x',y'), a expressão se torna justamente o que definimos como **potência** de P com relação à C.

$$\underbrace{(x' - x_0)^2 + (y' - y_0)^2}_{d^2} - R^2 = d^2 - R^2 = \text{Pot}_C(P)$$

De maneira geral, escrevemos:

Seja P = (x',y') um ponto qualquer num plano e C uma circunferência de equação: $x^2 + y^2 + m \cdot x + n \cdot y + p = 0$. A potência do ponto P com relação a C é dada por:

$$\text{Pot}_C(P) = x'^2 + y'^2 + m \cdot x' + n \cdot y' + p$$

Resultado 2.2.4

OBS.: Para obter a potência do ponto P com relação à circunferência basta colocarmos a equação na mesma forma do resultado 2.2.4 e substituirmos o ponto.

Cuidado! A potência do ponto (x',y') com relação ao círculo $4 \cdot x^2 + 4 \cdot y^2 = 8$ não vale $4 \cdot x'^2 + 4 \cdot y'^2 - 8$, mas sim $x'^2 + y'^2 - 4$.

Seja P um ponto no plano e C uma circunferência de raio R cujo centro dista d de P.

O sinal da potência do ponto P com relação à C varia conforme a posição relativa dos dois.

$$\text{Pot}_C(P) = 0 \Leftrightarrow \text{P pertence a C}$$
$$\text{Pot}_C(P) > 0 \Leftrightarrow \text{P é exterior a C}$$
$$\text{Pot}_C(P) < 0 \Leftrightarrow \text{P é interior a C}$$

Resultado 2.2.5

Consideremos uma circunferência C e um ponto P exterior a ela. Sejam A e B os pontos de interseção de uma reta secante à circunferência passando por P.

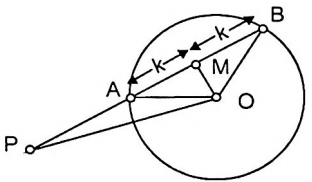


Figura 2.2.6

Calculemos o produto $\overline{PA}\cdot\overline{PB} = (\overline{PM}-k)\cdot(\overline{PM}+k) = \overline{PM}^2 - k^2$

Do teorema de Pitágoras no triângulo OMP:

$$\overline{PA}\cdot\overline{PB} = \overline{PM}^2 - k^2 = \left(\overline{PO}^2 - \overline{OM}^2\right) - k^2 = \overline{PO}^2 - \underbrace{\left(\overline{OM}^2 + k^2\right)}_{\overline{OA}^2}$$

Segue que: $\overline{PA}\cdot\overline{PB} = \overline{PO}^2 - \overline{OA}^2$

Sendo d a distância definida na definição 2.2.2 (ou seja, $d = \overline{PO}$), visto que $\overline{OA} = R$ é o raio da circunferência, temos:

$$\overline{PA}\cdot\overline{PB} = Pot_C(P) = \text{constante}$$

Chegaremos a um resultado parecido também se P é interior à circunferência. Vejamos!

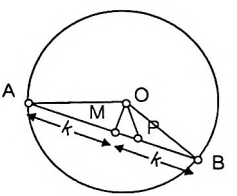


Figura 2.2.7

Calculemos o produto $\overline{PA}\cdot\overline{PB} = (\overline{PM} + k)\cdot(k - \overline{PM}) = k^2 - \overline{PM}^2$

Do teorema de Pitágoras no triângulo OMP:

$$\overline{PA}\cdot\overline{PB} = k^2 - \overline{PM}^2 = k^2 - \left(\overline{PO}^2 - \overline{OM}^2\right) = \underbrace{\left(\overline{OM}^2 + k^2\right)}_{\overline{OA}^2} - \overline{PO}^2 = R^2 - d^2$$

Segue que, se P é interior a C: $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = -Pot_C(P) = \text{constante}$

Esta dedução nos permite escrever os seguintes resultados.

Considere uma circunferência C de raio R. A partir de um ponto $P \notin C$ (distante d do centro da circunferência) traça-se uma secante à circunferência nos pontos A e B. Vale que PA.PB o produto é constante independente da reta secante.

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \text{constante} = \left|d^2 - R^2\right|$$

Resultado 2.2.6

No caso da reta a partir de P ser tangente à circunferência temos o seguinte interessante resultado.

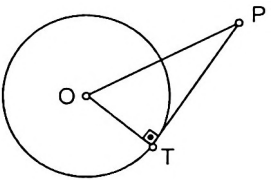


Figura 2.2.8

Do teorema de Pitágoras no triângulo OPT: $\overline{PT}^2 = \overline{PO}^2 - \overline{OT}^2 = d^2 - R^2$

Considere uma circunferência C de raio R. A partir de um ponto $P \notin C$ (distante d do centro da circunferência) traça-se uma tangente à circunferência em T. O quadrado do comprimento deste segmento tangente vale justamente a potência de P com relação a C.

$$\overline{PT}^2 = d^2 - R^2 = Pot_C(P)$$

Resultado 2.2.7

Exemplo 2.2.h Considere a circunferência $2x^2 + 2y^2 + 4x - 3 = 0$. Seja P o ponto (2,3). Verifique que este ponto é exterior à circunferência e determine o valor do comprimento PT de um segmento tangente à circunferência passando por P.

Solução:

A potência de um ponto (x,y) qualquer em relação à circunferência é:

$$Pot(x,y) = x^2 + y^2 + 2x - \frac{3}{2}$$

Substituindo o ponto P, temos:

$$Pot(P) = Pot(2,3) = 2^2 + 3^2 + 2 \cdot 2 - \frac{3}{2} = \frac{31}{2} > 0$$

Do resultado 2.2.5 temos que P é exterior à dada circunferência. Do resultado 2.2.7, temos: $\overline{PT}^2 = Pot(P) = \frac{31}{2}$

Logo: $\boxed{\overline{PT} = \frac{\sqrt{62}}{2}}$

OBS.: A partir de um ponto P exterior a uma circunferência C, pela simetria do problema, é possível traçar exatamente duas retas tangentes a C. Do resultado 2.2.7 fica claro que, sendo T e T' os dois pontos de tangência, teremos sempre:

$\overline{PT} = \overline{PT}'$

Resumindo, os segmentos tangentes a C a partir de um mesmo ponto exterior P têm comprimentos iguais! Este resultado aparentemente simples é incrivelmente útil, inclusive para nós daqui para frente.

Um resultado análogo vale no espaço R^3. A partir de um ponto P exterior traça-se duas retas tangentes à uma esfera E. Sendo T e T' os pontos de tangência vale que:

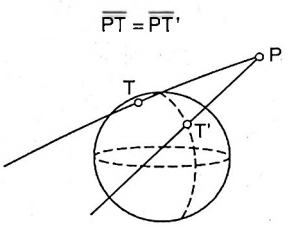


Figura 2.2.9

A demonstração é simples conhecendo o resultado 2.2.7. Deixamos ao leitor como **exercício.** Guarde este resultado pois precisaremos dele no capítulo 3!

Eixo Radical

Considere duas circunferências C e C' não concêntricas. O lugar geométrico dos pontos P que possuem a mesma potência com relação a C e C' é uma reta. A esta reta damos o nome de **eixo radical.**

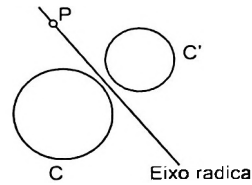


Figura 2.2.10

Demonstração:

Considere as equações de C e C' não concêntricas como sendo expressas de forma genérica:

$$C: x^2 + y^2 + m \cdot x + n \cdot y + p = 0$$
$$C': x^2 + y^2 + a \cdot x + b \cdot x + c = 0$$

Sendo $P = (x_0, y_0)$ podemos escrever as potências de P relativas a C e C':

$$Pot_C(P) = x_0^2 + y_0^2 + m \cdot x_0 + n \cdot y_0 + p$$
$$Pot_{C'}(P) = x_0^2 + y_0^2 + a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c$$

Se P é tal que $Pot_C(P) = Pot_{C'}(P)$:

$$x_0^2 + y_0^2 + m \cdot x_0 + n \cdot y_0 + p = x_0^2 + y_0^2 + a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c$$
$$\Rightarrow \underbrace{(m-a)}_{A} \cdot x_0 + \underbrace{(n-b)}_{B} \cdot y_0 + \underbrace{(p-c)}_{C} = 0$$
$$\Rightarrow A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C = 0$$

Se C e C' são não concêntricas, então $A = m - a$ e $B = n - b$ não são simultaneamente nulos e, portanto, o lugar geométrico é uma reta. □

Exemplo 2.2.i Mostre que dadas duas circunferências não concêntricas C e C', então o seu eixo radical é perpendicular à reta que liga os centros de C e C'.

Solução:

Considere as equações de C e C' expressas da forma genérica:

$$C: \quad (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$
$$C': \quad (x-p)^2 + (y-q)^2 = R'^2$$

As potências de um ponto (x,y) com relação a C e C' são:

$$Pot_C(x,y) = (x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2$$
$$Pot_{C'}(x,y) = (x-p)^2 + (y-q)^2 - R'^2$$

A equação do eixo radical é obtida igualando as duas equações acima:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2 = (x-p)^2 + (y-q)^2 - R'^2$$
$$\Rightarrow \cancel{x^2 + y^2} - 2a\cdot x - 2b\cdot x + a^2 + b^2 - R^2 =$$
$$= \cancel{x^2 + y^2} - 2p\cdot x - 2q\cdot x + p^2 + q^2 - R'^2$$
$$\Rightarrow 2(p-a)\cdot x + 2(q-b)\cdot y = p^2 + q^2 - a^2 - b^2 - R'^2 + R^2$$

Logo, o coeficiente angular do eixo radical é: $m_{\text{eixo radical}} = \dfrac{p-a}{b-q}$

O coeficiente angular da reta que liga os centros (a,b) e (p,q) é:

$$m_{OO'} = \frac{q-b}{p-a}$$

Com isso:

$$m_{\text{eixo radical}} \cdot m_{OO'} = \left(\frac{p-a}{b-q}\right)\left(\frac{q-b}{p-a}\right) = -1$$

Conclui-se que o eixo radical é perpendicular à reta que liga os centros das circunferências.

Do resultado demonstrado no exemplo anterior, escrevemos:

O eixo radical relativo às circunferências C e C' de centros O e O', respectivamente, é perpendicular à reta suporte do segmento que liga O e O'.

Resultado 2.2.9

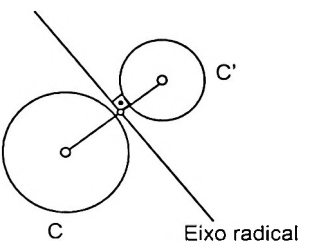


Figura 2.2.11

Um resultado trivial, no entanto não menos importante, pode ser destacado:

A corda definida pelos pontos de interseção entre duas circunferências secantes é perpendicular ao segmento que liga os centros destas circunferências.

Resultado 2.2.10

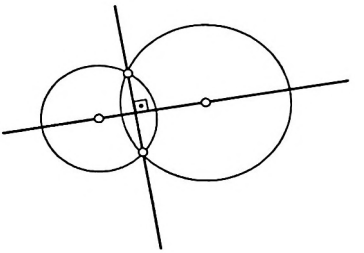


Figura 2.2.12

Demonstração: Os pontos de interseção entre duas circunferências secantes pertencem ao eixo radical. Do resultado 2.2.9 conclui-se o resultado 2.2.10. □

Exemplo 2.2.j Determine os pontos de interseção A e B das duas circunferências abaixo. Em seguida, determine o valor do segmento que liga A a B.

$$\begin{cases} C: \ (x-1)^2 + y^2 = 4 \\ C': \ (x-3)^2 + (y+2)^2 = 4 \end{cases}$$

Solução:

As potências de um ponto P(x,y) qualquer relativas a C e C' são:

$$\begin{cases} Pot_C(x,y) = x^2 - 2x + y^2 - 3 \\ Pot_{C'}(x,y) = x^2 - 6x + y^2 + 4y + 9 \end{cases}$$

Desta forma, a equação do eixo radical é obtida igualando as equações acima:

$$x^2 - 2x + y^2 - 3 = x^2 - 6x + y^2 + 4y + 9 \quad \Rightarrow \quad x - y = 3$$

A interseção do eixo radical com qualquer das circunferências nos dará os pontos A e B.

$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 4 \\ y = x - 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ x^2 - 2x + 1 + x^2 - 6x + 9 = 4$$

$$\Rightarrow \ x^2 - 4x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1 \text{ ou } x = 3$$

As interseções são, portanto, sem perda de generalidade:

$$\boxed{\begin{array}{l} A = (1,-2) \\ B = (3,0) \end{array}}$$

O segmento que liga A a B vale:

$$\overline{AB} = |\overline{AB}| = \sqrt{(3-1)^2 + (0+2)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\boxed{\overline{AB} = 2\sqrt{2}}$$

Exemplo 2.2.k São dadas duas circunferências C e C' de centros O e O' e raios R e R', respectivamente. Sabendo qual distância OO' vale d mostre que a distância do eixo radical à O vale:

$$\frac{d}{2} + \frac{(R - R') \cdot (R + R')}{2d}$$

Solução:

Considere o sistema de eixos coordenados centrado em O e tal que O' esteja também sobre o eixo das abscissas.

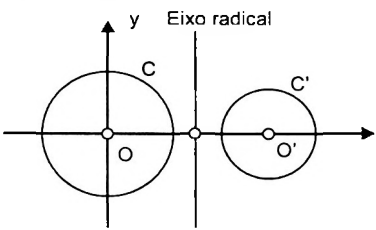


Figura I

As potências de um ponto P(x,y) qualquer relativas a C e C' são:

$$\begin{cases} Pot_C(x, y) = x^2 + y^2 - R^2 \\ Pot_{C'}(x, y) = (x - d)^2 + y^2 - R'^2 \end{cases}$$

Desta forma, a equação do eixo radical é obtida igualando as equações acima:

$$\cancel{x^2} + \cancel{y^2} - R^2 = \cancel{x^2} - 2dx + d^2 + \cancel{y^2} - R'^2$$

A equação do eixo radical é, portanto:

$$x = \frac{d^2 + (R^2 - R'^2)}{2d} = \frac{d}{2} + \frac{(R - R') \cdot (R + R')}{2d}$$

Portanto, a distância do eixo radical à O vale:

$$d(\text{eixo radical, O}) = \frac{d}{2} + \frac{(R - R')\cdot(R + R')}{2d}$$

Centro Radical

Considere três circunferências cujos centros O, O' e O" são não colineares. Existe um único ponto que possui a mesma potência com relação a estas 3 circunferências. A este ponto damos o nome de **centro radical**.

Resultado 2.2.11

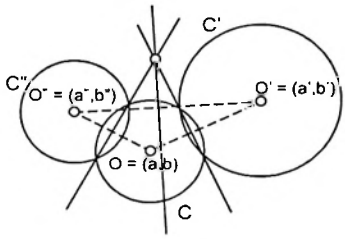


Figura 2.2.13

Demonstração: Considere as equações de C e C' não concêntricas como sendo expressas de forma genérica:

$$C: \quad (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$
$$C': \quad (x - a')^2 + (y - b')^2 = R'^2$$
$$C'': \quad (x - a'')^2 + (y - b'')^2 = R''^2$$

Como os centros não são colineares, temos:

$$\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ a' & b' & 1 \\ a'' & b'' & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-a' & b-b' & 0 \\ a'-a'' & b'-b'' & 0 \\ a'' & b'' & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-a' & b-b' \\ a''-a' & b''-b \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \text{(Eq. I)}$$

As equações das potências relativas às circunferências duas a duas são:

$$\begin{cases} Pot_C(x,y) = x^2 + y^2 - 2a\cdot x - 2b\cdot y + \underbrace{a^2+b^2-R^2}_{c} \\ Pot_{C'}(x,y) = x^2 + y^2 - 2a'\cdot x - 2b'\cdot y + \underbrace{a'^2+b'^2-R'^2}_{c'} \\ Pot_{C''}(x,y) = x^2 + y^2 - 2a''\cdot x - 2b''\cdot y + a''^2+b''^2-R''^2 \end{cases}$$

Para verificar a interseção destas 3 retas, temos o sistema:

$$\begin{cases} Pot_C(x, y) = Pot_{C'}(x, y) \\ Pot_{C'}(x, y) = Pot_{C''}(x, y) \\ Pot_C(x, y) = Pot_{C''}(x, y) \end{cases}$$

Podemos arrumar este sistema da seguinte maneira:

$$\begin{cases} 2(a'-a)\,x + 2(b'-b)\,y = c'-c \\ 2(a'-a'')\,x + 2(b'-b'')\,y = c'-c'' \\ 2(a-a'')\,x + 2(b-b'')\,y = c-c'' \end{cases}$$

Temos um sistema com 2 incógnitas e 3 equações (não é um sistema de Cramer). Vamos discuti-lo usando a regra de Rouché-Capelli (consulte um livro sobre sistemas lineares caso você desconheça essa regra de discussão de sistemas). Um determinante principal deste sistema é:

$$\Delta p = \begin{vmatrix} 2(a-a') & 2(b'-b) \\ 2(a'-a'') & 2(b'-b'') \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} a-a' & b'-b \\ a'-a'' & b'-b'' \end{vmatrix}_{Eq.I} \neq 0$$

A característica do sistema é portanto p = 2. Como existe uma única equação secundária, existe um único determinante característico.

$$\Delta C_r = \begin{vmatrix} 2(a'-a) & 2(b'-b) & c'-c \\ 2(a'-a'') & 2(b'-b'') & c'-c'' \\ 2(a-a'') & 2(b-b'') & c-c'' \end{vmatrix}$$

Ora, mas note que a 3ª linha é justamente o resultado da subtração da 1ª linha da 2ª linha. Logo o determinante característico é nulo, e, portanto, de acordo com a Regra de Rouchê Capelli, o sistema é possível determinado (p = n = 2).

Há, portanto, uma única solução da interseção entre os 3 eixos radicais. Em outras palavras, existe um único ponto que possui a mesma potência com relação às 3 circunferências.

Exemplo 2.2.I Ache o centro radical relativo às circunferências abaixo.

$$C: \quad (x-1)^2 + y^2 = 1$$

$$C': \quad (x-3)^2 + (y-2)^2 = 2$$

$$C'': \quad x^2 + (y-2)^2 = 1$$

Solução:

Vamos achar a equação do eixo radical relativo a C e C':

$$\begin{cases} Pot_C(x,y) = (x-1)^2 + y^2 - 1 = x^2 + y^2 - 2x \\ Pot_{C'}(x,y) = (x-3)^2 + (y-2)^2 - 2 = x^2 + y^2 - 6x - 4y + 11 \end{cases}$$

Igualando: eixo radical$_{C-C'}$: $4 \cdot x + 4 \cdot y - 11 = 0$

Da mesma forma encontramos a equação do eixo radical relativo a C e C"

$$\begin{cases} Pot_C(x,y) = (x-1)^2 + y^2 - 1 = x^2 + y^2 - 2x \\ Pot_{C''}(x,y) = x^2 + (y-2)^2 - 1 = x^2 + y^2 - 4y + 3 \end{cases}$$

Igualando: eixo radical$_{C-C''}$: $2 \cdot x - 4 \cdot y + 3 = 0$

O centro radical será a interseção entre os dois eixos radicais encontrados:

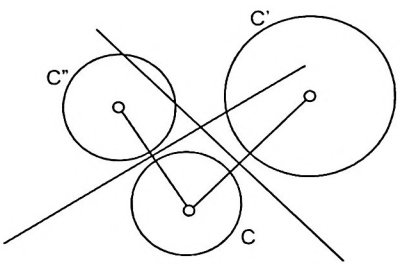


Figura I

$$\begin{cases} 4 \cdot x + 4 \cdot y - 11 = 0 \\ 2 \cdot x - 4 \cdot y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\text{Centro Radical} = \left(\frac{4}{3}, \frac{17}{12}\right)}$$

Ângulo entre duas Circunferências

Define-se **ângulo** entre duas curvas que se interceptam em algum ponto como o ângulo agudo formado entre as tangentes a cada curva neste ponto.

Quando este ângulo vale 90° diz-se que as curvas são **ortogonais** neste ponto.

Definição 2.2.3

A definição acima vale para quaisquer duas curvas no plano. Vamos analisar o caso particular das circunferências.

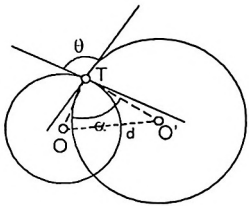


Figura 2.2.14

Dando a volta em torno do ponto T:

$$\theta + \alpha + 90^\circ + 90^\circ = 360^\circ \Rightarrow \alpha = 180^\circ - \theta$$

Da lei dos cossenos no triângulo TOO':

$$d^2 = R_1^2 + R_2^2 - 2R_1 \cdot R_2 \cdot \underbrace{\cos\alpha}_{=-\cos\theta}$$

De onde segue que:

$$\cos\theta = \frac{d^2 - \left(R_1^2 + R_2^2\right)}{2R_1 \cdot R_2}$$

Para garantir que estamos tomando o ângulo agudo, basta aplicarmos o módulo na expressão encontrada anteriormente:

$$\cos\theta = \left|\frac{d^2 - \left(R_1^2 + R_2^2\right)}{2R_1 \cdot R_2}\right|$$

O ângulo entre duas circunferências secantes de raios R_1 e R_2 e cujos centros distam d um do outro é dado por:

$$\theta = \arccos = \left(\left|\frac{d^2 - \left(R_1^2 + R_2^2\right)}{2R_1 \cdot R_2}\right|\right)$$

Resultado 2.2.12

Exemplo 2.2.m Mostre que se as circunferências secantes são ortogonais, então a potência do centro de qualquer uma das circunferências com relação à outra é igual ao quadrado do raio da outra.

Solução:

Sejam as circunferências secantes C_1 e C_2, de raios respectivos R_1 e R_2 e centros O_1 e O_2.

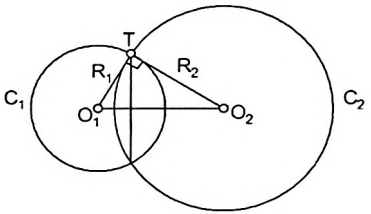


Figura I

Usando o teorema de Pitágoras no triângulo O_1O_2T:

$$\overline{O_1O_2}^2 = R_1^2 + R_2^2$$

De onde segue que:

$$\Rightarrow \begin{cases} \underbrace{\overline{O_1O_2}^2 - R_2^2}_{Pot_{C_2}(O_1)} = R_1^2 \\ \underbrace{\overline{O_1O_2}^2 - R_1^2}_{Pot_{C_2}(O_2)} = R_2^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Pot_{C_2}(O_1) = R_1^2 \\ Pot_{C_1}(O_2) = R_2^2 \end{cases}$$

2.3. Equação da Reta no Espaço

O leitor que compreendeu razoavelmente bem tudo aquilo que vimos sobre retas no plano (R^2) até o momento não terá problemas em entender a extensão do conceito para o espaço.

Dados dois pontos A e B no espaço (R^3), o conjunto de todos os pontos P no plano tais que $\overline{AB}$ seja paralelo a $\overline{AP}$ é definido como reta suporte do segmento AB. Denotaremos esta reta, a partir de agora, por reta (A,B).

Definição 2.3.1

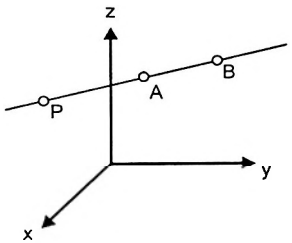


Figura 2.3.1

Vamos proceder de maneira rigorosamente igual ao que fizemos no plano para determinar as equações da reta no espaço. Sendo P um ponto (x,y,z), ele pertencerá à reta suporte do segmento AB ($A = (x_a,y_a,z_a)$ e $B = (x_b,y_b,z_b)$) quando:

$$\overline{AP} = t \cdot \left(\overline{AB}\right), \quad t \in \mathbb{R}$$

Desenvolvendo:

$$P - A = t \cdot (B - A) \Rightarrow (x, y, z) - (x_a, y_a, z_a) = t \cdot \left((x_b, y_b, z_b) - (x_a, y_a, z_a)\right)$$

$$\Rightarrow (x - x_a, y - y_a, z - z_a) = t \cdot (x_b - x_a, y_b - y_a, z_b - z_a)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - x_a = t \cdot (x_b - x_a) \\ y - y_a = t \cdot (y_b - y_a) \\ z - z_a = t \cdot (z_b - z_a) \end{cases}$$

Forma Paramétrica da Equação da Reta:

Dadas as coordenadas dos pontos $A = (x_a,y_a,z_a)$ e $B = (x_b,y_b,z_b)$, a equação da reta suporte de AB pode ser escrita como:

$$\begin{cases} x = x_a + t \cdot (x_a - x_b) \\ y = y_a + t \cdot (y_a - y_b) \\ z = z_a + t \cdot (z_a - z_b) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

A variável t é um parâmetro que, ao variar nos Reais, faz com que (x,y) representem todos os pontos desta reta.

Definição 2.3.2

Notaremos que os termos que acompanham t no conjunto de equações acima são coordenadas de um vetor paralelo à direção definida pela reta.

$$\begin{cases} x - x_a = t \cdot u_x \\ y - y_a = t \cdot u_y \\ z - z_a = t \cdot u_z \end{cases} , t \in \mathbb{R}$$

Note que o vetor diretor da reta ú pode ser qualquer vetor paralelo à direção da reta que, ainda assim, estaremos representando todos os pontos da reta ao variarmos t nos reais.

Dado um ponto $A = (x_a, y_a, z_a)$ e um vetor $\bar{u} = (x_u, y_u, z_u)$ paralelo à reta, a equação da mesma pode ser escrita como:

$$\begin{cases} x = x_a + t \cdot u_x \\ y = y_a + t \cdot u_y \\ z = z_a + t \cdot u_z \end{cases} , t \in \mathbb{R}$$

O vetor $\bar{u}$ é chamado de **Vetor Diretor** da reta. Como existem infinitos vetores paralelos a ú, existem infinitos vetores diretores para toda reta.

Resultado 2.3.1

Se nenhuma das componentes do vetor $\bar{u}$ for nula, podemos isolar o parâmetro t na equação paramétrica:

$$\frac{x - x_a}{u_x} = \frac{y - y_a}{u_y} = \frac{z - z_a}{u_z} = t \in \mathbb{R}$$

Forma Simétrica da Equação da Reta:

Se a reta não for paralela aos planos coordenados xoy, xoz, yoz, poderemos representá-la da seguinte forma, chamada **forma simétrica** da reta.

$$\frac{x - x_a}{u_x} = \frac{y - y_a}{u_y} = \frac{z - z_a}{u_z} = t \in \mathbb{R}$$

Definição 2.3.3

Exemplo 2.3.a São dados os pontos A = (1,0,–2), B = (0,0,3) , C =(1,1,1). Determine a equação da reta que passa pelo baricentro do triângulo ABC e é paralela ao vetor definido por $\overline{AC}$.

Solução: As coordenadas do baricentro são:

$$G = \frac{A + B + C}{3} = \frac{(1, 0, -2) + (0, 0, 3) + (1, 1, 1)}{3} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

Como a reta é paralela ao vetor definido por $\overline{AC}$, seu vetor diretor pode ser, por exemplo, o próprio $\overline{AC} = C - A = (0, 1, 3)$.

A equação da reta, na forma paramétrica, será:

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{1}{3} + t \\ z = \frac{2}{3} + 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Distância entre dois Pontos no Espaço

Dados dois pontos $A = (x_a, y_a, z_a)$ e $B = (x_b, y_b, z_b)$ no R^3, a distância entre eles é dada por:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 + (z_b - z_a)^2}$$

Resultado 2.3.2

Demonstração: A distância entre A e B é justamente o valor do módulo do vetor

$$|\overline{AB}| = |B - A| = |(x_b - x_a, y_b - y_a, z_b - z_a)|$$
$$= \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 + (z_b - z_a)^2} \qquad \square$$

Exemplo 2.3.b Determine a distância da reta encontrada no exemplo 2.3.a ao ponto D = (2,1,2).

Solução:

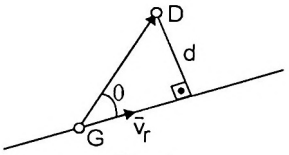


Figura I

Considere o seguinte produto vetorial:

$$\left|\overrightarrow{GD} \times \vec{v}_r\right| = \left|\overrightarrow{GD}\right| \cdot |\vec{v}_r| \cdot \text{sen}\theta = |\vec{v}_r| \cdot d \quad \Rightarrow \quad d(P, r) = \frac{\left|\overrightarrow{GD} \times \vec{v}_r\right|}{|\vec{v}_r|}$$

Logo:

$$d(P, r) = \frac{\left|\overrightarrow{GD} \times \vec{v}_r\right|}{|\vec{v}_r|} = \frac{1}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 3^2}} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \left| \left(\frac{5}{3}\vec{i} - 4\vec{j} + \frac{4}{3}\vec{k}\right) \right|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{10}} \left(\sqrt{\frac{25}{9} + 16 + \frac{16}{9}} \right) \quad \therefore \quad d(P, r) = \frac{\sqrt{1850}}{30}$$

Distância entre Ponto e Reta

Seguindo o raciocínio do exemplo 2.3.b podemos determinar uma expressão para a distância de um ponto P a uma reta r no R.

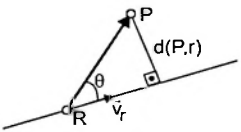


Figura 2.3.2

Seja R um ponto da reta r. Considere o seguinte produto vetorial:

$$\left|\overrightarrow{RP} \times \vec{v}_r\right| = \left|\overrightarrow{RP}\right| \cdot |\vec{v}_r| \cdot \text{sen}\theta = |\vec{v}_r| \cdot d(P, r) \quad \Rightarrow \quad d(P, r) = \frac{\left|\overrightarrow{RP} \times \vec{v}_r\right|}{|\vec{v}_r|}$$

De onde escrevemos o seguinte resultado:

Dados um ponto P não pertencente a uma reta r de vetor diretor $\vec{v}_r$, a distância deste ponto à reta é dada por:

$$d(P, r) = \frac{\left|\overrightarrow{RP} \times \vec{v}_r\right|}{|\vec{v}_r|}$$

Onde R é um ponto qualquer sobre a reta r.

Exemplo 2.3.c Considere a reta definida pelo ponto A = (1,0,1) e pela direção $\vec{u} = (2,-1,1)$. Considere também o ponto B = (1,3,1). Determine:

a) A projeção do ponto B sobre esta reta.
b) O simétrico (B') de B com relação a esta reta.

Solução:

a) Seja P a projeção de B sobre a reta. Do resultado 1.3.6

$$\overrightarrow{AP} = \text{proj}_{\vec{u}}\overrightarrow{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}}{|\vec{u}|^2}\cdot\vec{u} = \frac{(0\cdot 2 + 3\cdot(-1) + 0\cdot 1)}{2^2 + (-1)^2 + 1^2}(2,-1,1) = \frac{-1}{2}(2,-1,1)$$

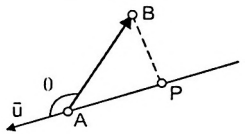


Figura I

Nesse caso, o sinal do produto escalar entre os vetores $\vec{u}$ e $\overrightarrow{AB}$ é negativo, e portanto o ângulo θ é obtuso.

Com isso:

$$\overrightarrow{AP} = P - A = -\frac{1}{2}\cdot\vec{u} = \left(-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

Finalmente:

$$P = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

b) Como B' é simétrico de B em relação a P, temos:

$$\frac{B + B'}{2} = P \Rightarrow B' = 2P - B = (0, 1, 1) - (1, 3, 1)$$

$$\therefore \quad \boxed{B' = (-1, -2, 0)}$$

Exemplo 2.3.d É dada a reta r na seguinte forma simétrica.

$$\frac{x}{2} = \frac{y-1}{\sqrt{5}} = \frac{z-4}{4}$$

Seja A o ponto que anula todos os termos da equação acima. Determine o ponto P pertencente a r tal que P diste 5 unidades de comprimento de A.

Solução:

Da equação de r, o ponto A é (0,1,4). Seja t um parâmetro real, tal que:

$$\frac{x}{2} = \frac{y-1}{\sqrt{5}} = \frac{z-4}{4} = t \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 2t \\ y = \sqrt{5}\cdot t + 1 \\ z = 4t + 4 \end{cases}$$

Logo, como P pertence à reta, será da forma:

$$P\left(2t,\ \sqrt{5}\cdot t + 1,\ 4t + 4\right)$$

Como AP = 5, temos:

$$\overline{AP} = P - A = \left(2t,\ \sqrt{5}t,\ 4t\right) \quad \Rightarrow \quad 5 = \sqrt{4t^2 + 5t^2 + 16t^2} \quad \Rightarrow \quad t = \pm 1$$

Há portanto, dois pontos que atendem às condições do enunciado:

$$P = \left(2,\ \sqrt{5} + 1,\ 8\right) \text{ ou } P = \left(-2,\ -\sqrt{5} + 1,\ 0\right)$$

Exemplo 2.3.e Mostre que sendo r e s duas retas dadas, com vetores diretores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, o ângulo agudo entre elas é dado por:

$$\theta = \arccos\left(\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}\right)$$

Discuta as possibilidades de posição relativas entre as duas retas.

Solução:

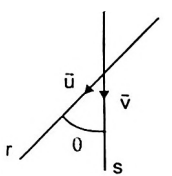


Figura I

O ângulo θ é o ângulo entre as retas coincide com o ângulo entre os vetores diretores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Do produto escalar entre estes dois vetores, temos:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\theta$$

Para garantirmos que estamos tomando o ângulo agudo entre as duas retas, aplicamos o módulo na expressão de cosq

$$\cos\theta = \left(\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}\right)$$

A expressão acima vale para todas as possibilidades de posição relativa entre as duas retas:

r e s são paralelas: $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot k\cdot\vec{u} = k\cdot|\vec{u}|^2 \Rightarrow \cos\theta = 1 \Rightarrow \theta = 0^\circ$

r e s são perpendiculares: $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Rightarrow \cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = 90^\circ$

r e s são concorrentes ou reversas: $\theta = \arccos\left(\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}\right)$

Distância entre duas Retas

Se duas retas r e s não são concorrentes poderemos calcular a distância entre elas. Isto ocorrerá em somente dois casos: quando as duas retas forem paralelas ou quando forem reversas.

Retas r e s são paralelas:

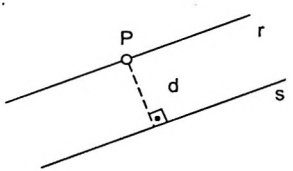


Figura 2.3.3

Neste caso, a distância entre as duas retas será a distância de um ponto qualquer de uma das retas à outra. Bastará portanto, aplicar o resultado 2.1.2

Retas r e s são reversas:

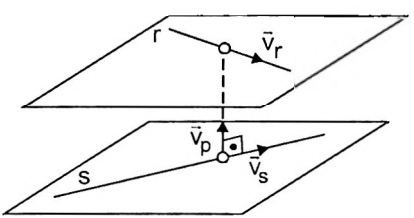


Figura 2.3.4

Se r e s são reversas, a distância entre as retas será dada pelo comprimento do segmento de reta (p) perpendicular comum.

O vetor diretor da reta p será perpendicular a ambos os vetores diretores $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$ das retas r e s. Podemos dizer então que:

$$\vec{v}_p \;//\; \vec{v}_r \times \vec{v}_s$$

Tome um ponto R sobre a reta r, e um ponto S sobre a reta s. A projeção do vetor $\overline{RS}$ sobre o vetor $\vec{v}_p$ será justamente o vetor que liga os pontos extremos do segmento perpendicular comum entre as duas retas.

$$d(r,s) = |R'S'| = \text{proj}_{\vec{v}_p}\overline{RS}$$

Usando a expressão para a projeção de um vetor (**Resultado 1.3.6**):

$$d(r,s) = \left|\text{proj}_{\vec{v}_p}\overline{RS}\right| = \left|\frac{\overline{RS}\cdot\vec{v}_p}{|\vec{v}_p|^2}\cdot\vec{v}_p\right| = \frac{|\overline{RS}\cdot\vec{v}_p|}{|\vec{v}_p|} = \frac{|\overline{RS}\cdot(\vec{v}_r\times\vec{v}_s)|}{|\vec{v}_r\times\vec{v}_s|}$$

Dadas duas retas reversas r e s, cujos vetores diretores são $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$, a distância entre elas é dada por:

$$d(r,\ s) = \frac{|\overline{RS}\cdot(\vec{v}_r\times\vec{v}_s)|}{|\vec{v}_r\times\vec{v}_s|} = \frac{\left|\left[\overline{RS},\vec{v}_r,\vec{v}_s\right]\right|}{|\vec{v}_r\times\vec{v}_s|}$$

Onde R é um ponto qualquer de r e S é um ponto qualquer de s.

Resultado 2.3.4

Exemplo 2.3.f Dadas as retas r e s a seguir verifique se elas são concorrentes, paralelas, ou reversas. Se elas não forem concorrentes, calcule a distância entre elas.

$$r:\ (x,y,z) = (1 + 2t\ ,\ 3 + 4t,\ 5 + t)$$
$$s:\ (x,y,z) = (1 + 2t, -1 + 2t, -3 + t)$$

Solução:

De imediato vemos que as retas não são paralelas, pois seus vetores diretores não são paralelos:

$$\vec{v}_r = (2,4,1),\ \vec{v}_s = (2,2,1)$$

Vamos verificar se essas retas são coplanares (neste caso seriam, então, concorrentes) ou não coplanares (neste caso seriam reversas). Tomemos 2 pontos quaisquer P_r e P_s pertencentes a r e s.

Fazendo t = 0 nas equações das retas r e s temos, por exemplo:

$$\begin{cases} P_r = (1, 3, 5) \\ P_s = (1, -1, -3) \end{cases} \Rightarrow \overline{P_r P_s} = (0, -4, -8)$$

Vamos verificar a coplanaridade dos vetores $\bar{v}_r$, $\bar{v}_s$ e $\overline{P_r P_s}$:

$$\left[\bar{v}_r, \bar{v}_s, \overline{P_r P_s}\right] = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -8 \end{vmatrix} = 32 \neq 0$$

Como os vetores $\bar{v}_r$, $\bar{v}_s$ e $\overline{P_r P_s}$ não são coplanares, as retas r e s são retas **reversas.**

A distância será calculada usando o resultado 2.3.4:

$$d(r,s) = \frac{\left[\bar{v}_r, \bar{v}_s, \overline{P_r P_s}\right]}{|\bar{v}_r \times \bar{v}_s|} = \frac{32}{\left\| \begin{matrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{matrix} \right\|} = \frac{32}{|2\cdot\hat{i} - 4\cdot\hat{k}|} = \frac{32}{\sqrt{2^2 + 0^2 + (-4)^2}} = \frac{32}{\sqrt{20}} = \frac{16\sqrt{5}}{5}$$

$$\boxed{d(r,s) = \frac{16\sqrt{5}}{5}}$$

2.4. Equação do Plano

Assim como o caso da reta, a definição de "plano" é tão intuitiva que é quase dispensável. Tanto é intuitiva que a geometria Euclidiana costuma tratar a noção de plano como primitiva. Para manter a coerência com o que já vimos até o momento, vamos definir um plano da seguinte forma.

São dados 3 pontos no espaço A, B e C não colineares. O subconjunto do R^3 de pontos X tais que $\overline{AX}$ é combinação linear de $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ é o chamado **plano** definido pelos pontos O, A e C.

Definição 2.4.1

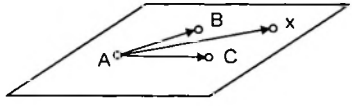


Figura 2.4.1

Dados os pontos $A = (x_a, y_a, z_a)$, $B = (x_b, y_b, z_b)$ e $C = (x_c, y_c, z_c)$, vejamos como determinamos a equação analítica de um plano.

$$\overline{AX} = \alpha_1 \cdot \overline{AB} + \alpha_2 \cdot \overline{AC}\,,\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$$

De onde tem-se:

$$X - A = \alpha_1 \cdot (B - A) + \alpha_2 \cdot (C - A)$$

$$\Rightarrow\ (x, y, z) = (x_a,\ y_a,\ z_a) + \alpha_1 \cdot (x_b - x_a,\ y_b - y_a,\ z_b - z_a) + \alpha_2 \cdot (x_c - x_a,\ y_c - y_a,\ z_c - z_a)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x_a + \alpha_1 \cdot (x_b - x_a) + \alpha_2 \cdot (x_c - x_a) \\ y = y_a + \alpha_1 \cdot (y_b - y_a) + \alpha_2 \cdot (y_c - y_a) \\ z = z_a + \alpha_1 \cdot (z_b - z_a) + \alpha_2 \cdot (z_c - z_a) \end{cases}$$

Forma Paramétrica da Equação do Plano

Dados os pontos $A = (x_a, y_a, z_a)$, $B = (x_b, y_b, z_b)$, $C = (x_c, y_c, z_c)$, a equação do plano definido por estes pontos é

$$\begin{cases} x = x_a + \alpha_1 \cdot (x_b - x_a) + \alpha_2 \cdot (x_c - x_a) \\ y = y_a + \alpha_1 \cdot (y_b - y_a) + \alpha_2 \cdot (y_c - y_a) \\ z = z_a + \alpha_1 \cdot (z_b - z_a) + \alpha_2 \cdot (z_c - z_a) \end{cases},\ \alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{R}$$

Definição 2.4.2

Notaremos que os termos que acompanham a_1 e a_2 no conjunto de equações acima são coordenadas de dois vetores paralelos ao plano (não paralelos entre si).

Da equipolência de vetores no R^3 poderíamos escrever a equação paramétrica de um plano, de maneira geral, da seguinte forma:

Considere $A = (x_a, y_a, z_a)$ e os vetores $\bar{u} = (x_u, y_u, z_u)$ e $\bar{v} = (x_v, y_v, z_v)$, **não paralelos (Linearmente Independentes) entre si**, mas paralelos a um mesmo plano que contém o ponto A.

A equação deste plano, na sua forma paramétrica pode ser escrita como:

$$\begin{cases} x = x_a + \alpha_1 \cdot x_u + \alpha_2 \cdot x_v \\ y = y_a + \alpha_1 \cdot y_u + \alpha_2 \cdot y_v \\ z = z_a + \alpha_1 \cdot z_u + \alpha_2 \cdot z_v \end{cases},\ \alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{R}$$

Os vetores $\bar{u}$ e $\bar{v}$ formam um conjunto de **Vetores Diretores** do plano. Como existem infinitos conjuntos de pares $\bar{u}$, $\bar{v}$ linearmente independentes e paralelos ao plano, existirão infinitos pares de vetores diretores a um plano.

Resultado 2.4.1

Um plano também pode ser definido por um vetor perpendicular ao mesmo, e por pelo qual deve passar.

Vejamos!

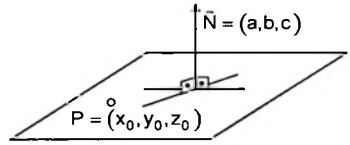


Figura 2.4.2

Seja $\vec{N} = (a,b,c)$ o vetor perpendicular ao plano e $P_0 = (x_0,y_0,z_0)$ o ponto fixo pertencente ao plano. Qualquer outro ponto P = (x,y,z) pertencerá ao plano desde que o vetor $\overrightarrow{PP_0}$ seja perpendicular a $\vec{N}$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PP_0} \perp \vec{N} &\Rightarrow (x_0 - x,\ y_0 - y,\ z_0 - z) \cdot (a,\ b,\ c) = 0 \\ &\Rightarrow a \cdot (x_0 - x) + b \cdot (y_0 - y) + c \cdot (z_0 - z) = 0 \\ &\Rightarrow a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z - (a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c \cdot z_0) = 0 \end{aligned}$$

Fazendo $d = -(a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c \cdot z_0)$, temos uma segunda forma da equação do plano.

Forma Geral da Equação do Plano:

Seja (x_0,y_0,z_0) um ponto do plano. Os pontos (x,y,z) deste plano atendem à seguinte equação:

$$a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d = 0$$

Onde (a,b,c) é um vetor normal qualquer ao plano e

$$d = -(a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c \cdot z_0)$$

é uma constante cujo valor é obtido ao substituirmos um ponto pertencente ao plano na equação acima.

Definição 2.4.3

A Forma Geral da equação do plano é equivalente à forma paramétrica. Como **exercício** elimine os parâmetros α_1 e α_2 na equação da definição 2.4.2 e mostre esta equivalência.

Exemplo 2.4.a Determine a equação do plano que passa pelos pontos de coordenadas A = (1,0,–1), B = (3,2,0), C = (1,1,2).

1ª Solução:

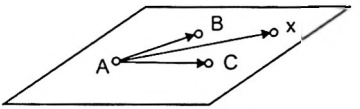


Figura I

Sendo X = (x,y,z) um ponto qualquer do plano os vetores $\overrightarrow{AX}$, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ serão linearmente dependentes. Do resultado do **exercício 1.26 de fixação**, temos que:

$$\left[\overrightarrow{AX}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = 0$$

Podemos interpretar a equação acima pelo fato de que os vetores não apresentam volume (são coplanares).

$$\left[\overrightarrow{AX}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z+1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 6\cdot(x-1) + 2\cdot(z+1) - 1\cdot(x-1) - 6\cdot y = 0$$

Desenvolvendo temos a equação do plano pedida: $\boxed{5x - 6y + 2z - 3 = 0}$

2ª Solução:

Note que o vetor dado pelo produto vetorial $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ será perpendicular ao plano.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 5\cdot\hat{i} - 6\cdot\hat{j} + 2\cdot\hat{k} = (5, -6, 2)$$

Logo a equação do plano será da forma: $5x - 6y + 2z + d = 0$.

Substituindo o ponto A = (1,0,-1) no plano teremos:

$$5\cdot 1 - 6\cdot 0 + 2\cdot(-1) + d = 0 \quad \therefore \quad d = -3,$$

A equação do plano é, portanto: $\boxed{5\cdot x - 6\cdot y + 2\cdot z - 3 = 0}$

Exemplo 2.4.b (IME 1998 - adaptada) Resolva o sistema linear abaixo em função dos parâmetros α e β. Em seguida, interprete geometricamente o que ocorre com o sistema para os diversos valores destes parâmetros.

$$\begin{cases} \pi_1 : x - 2y + 3z = -4 \\ \pi_2 : 5x - 6y + 7z = -8 \\ \pi_3 : 6x + 8y + \alpha z = \beta \end{cases}$$

Solução:

As equações lineares representam 3 planos (π_1, π_2, π_3) não paralelos (uma vez que seus vetores normais não são paralelos). Os dois primeiros planos, por não serem paralelos, com certeza terão uma reta como interseção. Usando as 2 primeiras equações vamos expressar x e y em função de z:

$$\begin{cases} x - 2y = -4 - 3z \\ x - \frac{6}{5}y = -\frac{8}{5} - \frac{7}{5}z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + z \\ y = 3 + 2z \end{cases}$$

Chamando z = t, onde t será um parâmetro variando nos reais, determinamos a equação da reta interseção $\pi_1 \cap \pi_2$:

$$\pi_1 \cap \pi_2 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + 2t, \, t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

Para analisar as soluções do sistema, bastará analisarmos a interseção desta reta com o plano p_3.

$$(\pi_1 \cap \pi_2) \cap \pi_3 : \; 6(2 + t) + 8(3 + 2t) + \alpha \cdot t = \beta \;\Rightarrow\; t = \frac{\beta - 36}{\alpha + 22}$$

Analisemos algumas possibilidades.

1º caso: $\alpha = -22$, $\beta = 36$

Nesse caso a interseção $(\pi_1 \cap \pi_2) \cap \pi_3$ ocorrerá para todo t real, pois:

$$6(2 + t) + 8(3 + 2t) - 22t = 36 \quad \forall t$$

Ou seja, todo ponto da reta resultante da interseção entre os 2 primeiros planos p_1 e p_2 também será ponto de p_3. A interseção entre os 3 planos é portanto esta reta.

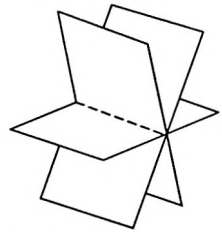


Figura I - Sistema Possível Indeterminado

2º caso: $\alpha = -22$, $\beta \neq 36$

Neste caso não haverá t real que satisfaça a equação da interseção $(\pi_1 \cap \pi_2) \cap \pi_3$, pois:

$$\beta \neq 36 \quad \Rightarrow \quad 6\cdot(2 + t) + 8\cdot(3 + 2t) - 22\cdot t - \beta \neq 0 \qquad \forall t$$

Ou seja, nenhum ponto da reta resultante da interseção entre os 2 primeiros planos p_1 e p_2 também será ponto de p_3. A interseção simultânea entre os 3 planos é portanto, o conjunto vazio.

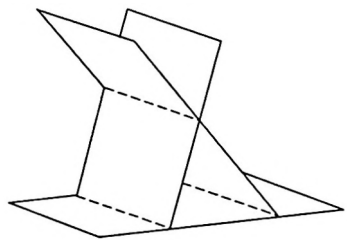


Figura II – Sistema Impossível

3º caso: $\alpha \neq 22$

Nesse caso haverá uma única solução para a interseção $(\pi_1 \cap \pi_2) \cap \pi_3$:

$$t = \frac{\beta - 36}{\alpha + 22} \quad \Rightarrow \quad (\pi_1 \cap \pi_2) \cap \pi_3 = \left(2 + \frac{\beta - 36}{\alpha + 22}, 3 + 2\cdot\left(\frac{\beta - 36}{\alpha + 22}\right), \frac{\beta - 36}{\alpha + 22}\right)$$

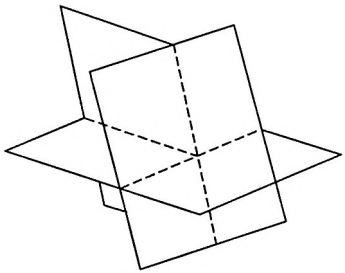


Figura III – Sistema Possível e Determinado

Distância entre Ponto e Plano

Considere $P = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto não pertencente ao plano π de equação: $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d = 0$. A distância do ponto P ao plano π é dada por:

$$d(P, \pi) = \frac{|a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c \cdot z_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Resultado 2.4.2

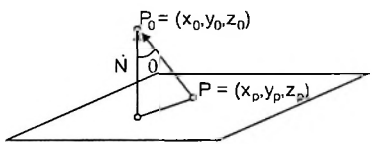


Figura 2.4.3

Demonstração:

Seja $P = (x_p, y_p, z_p)$ um ponto qualquer no plano. Consideremos o módulo do produto escalar entre os vetores $\overrightarrow{PP_0}$ e $\vec{N}$. x

$$\left|\overrightarrow{PP_0} \cdot \vec{N}\right| = \left|\vec{N}\right| \cdot \underbrace{\left|\overrightarrow{PP_0}\right| \cdot |\cos\theta|}_{=d(P,\pi)} \quad \Rightarrow \quad d(P, \pi) = \frac{\left|\overrightarrow{PP_0} \cdot \vec{N}\right|}{\left|\vec{N}\right|}$$

Desenvolvendo:

$$d(P,\pi) = \frac{\left|(x_o - x_p,\ y_o - y_p,\ z_o - z_p)\cdot(a,\ b,\ c)\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$= \frac{\left|a\cdot x_o + b\cdot y_o + c\cdot z_o - (a\cdot x_p + b\cdot y_p + c\cdot z_p)\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Como $P = (x_p, y_p, z_p)$ pertence ao plano: $a\cdot x_p + b\cdot y_p + c\cdot z_p = -d$

Logo:

$$d(P,\ \pi) = \frac{\left|-(a\cdot x_o + b\cdot y_o + c\cdot z_o + d)\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{\left|a\cdot x_o + b\cdot y_o + c\cdot z_o + d\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Exemplo 2.4.c Calcule a área da seção determinada por um plano que intercepta um cubo ABCD-EFGH (em função da aresta 'a') pelos pontos médios de duas arestas de vértice comum G e pelo ponto médio da aresta ortogonal (e reversa) àquelas arestas. Calcule também a distância de G a este plano.

Solução:

Os pontos T, P e Q determinam o plano em questão. Vamos achar a equação deste plano sabendo que qualquer ponto X = (x,y,z) pertencer ao plano desde que o produto misto dos vetores TX, TP e TQ seja nulo.

$$\begin{vmatrix} x & y & z - \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} & a & \frac{a}{2} \\ a & \frac{a}{2} & \frac{a}{2} \end{vmatrix} = x\cdot\frac{a^2}{4} + y\cdot\frac{a^2}{4} - \frac{3a^2}{4}\cdot z + \frac{3a^3}{8} = 0$$

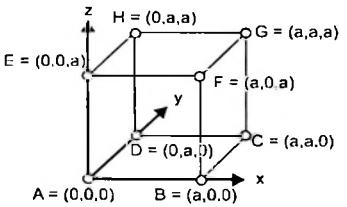


Fig. I

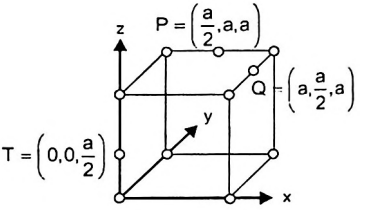


Fig. II

Simplificando chegamos à equação do plano: $2x + 2y - 6z + 3a = 0$

Com esta equação fica fácil encontrarmos os pontos de interseção do plano com as demais arestas.

Fazendo x = a, y = 0 temos a interseção do plano com BF: M = (a, 0 , 5.a/6)

Fazendo x = 0, y=a temos a interseção do plano com DH: N = (0, a , 5a/6)

As demais interseções ocorrem fora do cubo.

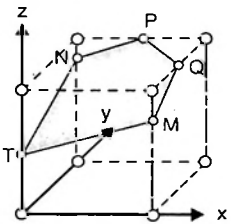


Fig. III

Para determinar a área da seção vamos usar o resultado 1.4.6. Podemos separar a área da seção TMQPN em 3 triângulos e usarmos a simetria do problema.

$$A_{TMQPN} = A_{TMQ} + A_{TQP} + A_{TPN} = 2A_{TMQ} + A_{TQP}$$

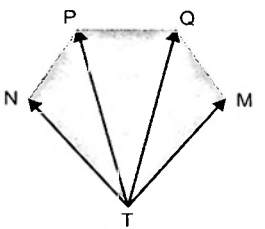


Fig. IV

Logo: $A_{TMQPN} = 2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\left|\overline{TQ}\times\overline{TM}\right|\right)+\frac{1}{2}\cdot\left|\overline{TQ}\times\overline{TP}\right|$, onde

$$\begin{cases}\overline{TM} = M - T = \left(a,\ 0,\ \frac{a}{3}\right)\\ \overline{TQ} = Q - T = \left(a,\ \frac{a}{2},\ \frac{a}{2}\right)\\ \overline{TP} = P - T = \left(\frac{a}{2},\ a,\ \frac{a}{2}\right)\end{cases}$$

$$A_{TMQPN} = \left\|\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a & \frac{a}{2} & \frac{a}{2}\\ a & 0 & \frac{a}{3}\end{vmatrix}\right\| + \frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a & \frac{a}{2} & \frac{a}{2}\\ \frac{a}{2} & a & \frac{a}{2}\end{vmatrix}\right\| =$$

$$= \left|\hat{i}\cdot\frac{a^2}{6} + \hat{j}\cdot\frac{a^2}{6} - \hat{k}\cdot\frac{a^2}{2}\right| + \frac{1}{2}\cdot\left|-\hat{i}\cdot\frac{a^2}{4} - \hat{j}\cdot\frac{a^2}{4} + \hat{k}\cdot\frac{3a^2}{4}\right|$$

$$= a^2\cdot\sqrt{\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{4}} + \frac{a^2}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{9}{16}} = \frac{a^2}{6}\cdot\sqrt{11} + \frac{a^2}{8}\cdot\sqrt{11} = \frac{7\sqrt{11}}{24}\cdot a^2$$

$$\boxed{A_{TMQPN} = \frac{7\sqrt{11}}{24}\cdot a^2}$$

A distância do ponto G até o plano é dada pelo resultado 2.4.2:

$$d(G,\text{ plano}) = \frac{|2a + 2a - 6a + 3a|}{\sqrt{2^2+2^2+(-6)^2}} = \frac{a}{\sqrt{44}}$$

$$\boxed{d(G,\text{ plano}) = \frac{a}{2\sqrt{11}}}$$

Exemplo 2.4.d Mostre que sendo π e α dois planos com vetores normais $\vec{n}_\pi$ e $\vec{n}_\alpha$, o ângulo diedro entre eles é dado por:

$$\theta = \arccos\left(\frac{|\vec{n}_\pi\cdot\vec{n}_\alpha|}{|\vec{n}_\pi|\cdot|\vec{n}_\alpha|}\right)$$

Solução:

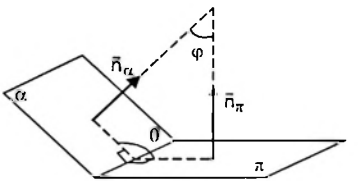


Figura I

Da figura acima: $\theta + \varphi + 90° + 90° = 360° \Rightarrow \varphi = 180° - \theta$

O ângulo φ é o ângulo entre os vetores normais $\vec{n}_\pi$ e $\vec{n}_\alpha$. Do produto escalar entre estes dois vetores, temos:

$$\vec{n}_\pi \cdot \vec{n}_\alpha = |\vec{n}_\pi| \cdot |\vec{n}_\alpha| \cdot \underbrace{\cos\varphi}_{-\cos\theta}$$

Para garantirmos que estamos tomando o ângulo agudo entre os dois planos, aplicamos o módulo na expressão de cosq

$$\cos\theta = \frac{|\vec{n}_\pi \cdot \vec{n}_\alpha|}{|\vec{n}_\pi| \cdot |\vec{n}_\alpha|}$$

Exemplo 2.4.e São dados os dois planos α e β a seguir. Verifique que estes planos não são paralelos, e determine a equação da reta resultante da interseção entre estes dois planos.

$$\alpha: \begin{cases} x = 1 + t_1 - 2t_2 \\ y = t_2 \\ z = -t_1 \end{cases}, t_1, t_2 \in \mathbb{R} \qquad \beta: 2x - y + z + 1 = 0$$

1ª Solução: Da equação do plano α, conhecemos um par de vetores diretores (paralelos ao plano): os vetores (1,0,–1) e (–2,1,0).

De imediato, verifica-se que α e β não são paralelos, uma vez que um vetor normal de β, o vetor (2, -1, 1) , não é perpendicular a nenhum dos vetores diretores de α. (Basta testarmos o produto escalar!)

O produto vetorial entre os dois vetores diretores do plano α será, portanto, perpendicular ao plano. Sendo $\vec{n}$ um vetor normal ao plano:

$$\vec{n} // \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \hat{i} + 2\cdot\hat{j} + \hat{k} = (1, 2, 1)$$

A equação do plano será da forma: $x + 2y + z + d = 0$. Da equação paramétrica conhecemos um ponto, por exemplo, (1,0,0). Substituindo este ponto na equação, temos:

$$1 + 2\,0 + 0 + d = 0 \quad \therefore \quad d = -1$$

A equação do plano α é: $x + 2y + z - 1 = 0$

A interseção entre os planos α e β virá da solução do sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + z + 1 = 0 \\ x + 2y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

Como os vetores normais destes planos não são paralelos, os planos também não o são. A interseção entre eles será portanto uma reta.

Fazendo $z = t$ o parâmetro a ser variado nos reais, obtemos a equação desta reta:

$$\begin{cases} 2x - y = -t - 1 \\ x + 2y = 1 - t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-3t - 1}{5} \\ y = \dfrac{3 - t}{5} \end{cases}$$

Isolando t obtemos a equação da reta em sua forma simétrica:

$$\boxed{\frac{\left(x + \frac{1}{5}\right)}{-\frac{3}{5}} = \frac{\left(y - \frac{3}{5}\right)}{\frac{-1}{5}} = z = t \in \mathbb{R}}$$

2ª Solução:

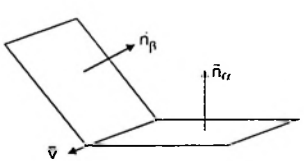


Figura I

Seja $\vec{v}$ o vetor diretor da reta resultante. Da figura I acima, note que $\vec{v}$ é perpendicular a ambos os vetores normais $\vec{n}_\alpha$ e $\vec{n}_\beta$. Logo $\vec{v}$ deverá ser paralelo ao produto vetorial. Aproveitando a dedução da 1ª solução temos:

$$\begin{cases} \vec{n}_\alpha = (1, 2, 1) \\ \vec{n}_\beta = (2, -1, 1) \end{cases} \Rightarrow \vec{v} \,//\, \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3\hat{i} + \hat{j} - 5\hat{k} = (3, 1, -5)$$

Conhecendo um ponto desta reta poderemos obter a equação da reta. Substituindo as equações do plano α em β:

$$2(1 + t_1 - 2t_2) - t_2 - t_1 + 1 = 0 \Rightarrow -5t_2 + t_1 + 3 = 0$$

Por exemplo, fazendo $t_1 = 2$, teremos $t_2 = 1$.

O ponto $\begin{cases} x = 1 + 2 - 2 \cdot 1 \\ y = 1 \\ z = -2 \end{cases} = (1, 1, -2)$, portanto, pertence a esta reta.

A equação simétrica da reta interseção pode, então, ser escrita:

$$\frac{x - 1}{3} = \frac{y - 1}{1} = \frac{z + 2}{-5} = t$$

Ué?? Por quê as equações obtidas nas 2 soluções são diferentes? Não deveriam ser iguais?

OBS.: Embora as equações achadas na 1a e 2a solução pareçam completamente diferentes elas representam a mesma reta exatamente.

Fica como exercício ao leitor verificar este fato.

2.5. Equação da Esfera

Seja $C = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto no espaço R^3. O conjunto dos pontos P tais que a distância de P a C é constante e vale R é chamada **esfera** de centro em C e raio R.

Definição 2.5.1

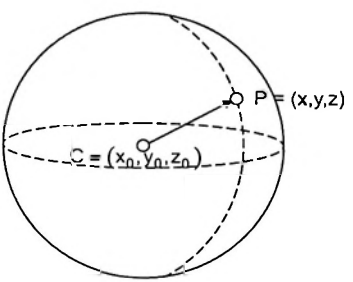


Figura 2.5.1

A equação da esfera é obtida facilmente seguindo a definição. Seja um ponto qualquer P = (x,y,z) da esfera.

$$d(P,C) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z + z_0)^2} = R$$

Elevando ao quadrado chegamos a:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z + z_0)^2 = R^2$$

A equação dos pontos P = (x,y,z) pertencentes à esfera com centro em $C = (x_0,y_0,z_0)$ e raio R é:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z + z_0)^2 = R^2$$

Resultado 2.5.1

Exemplo 2.5.a Identifique geometricamente os subconjuntos do $\mathbb{R}^3$ dados pelas equações abaixo. Em seguida, determine a área da figura plana resultante da interseção destes dois subconjuntos.

$$\alpha = \left\{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2t_1 - t_2,\ y = 1 + t_1,\ z = 1 - t_2,\ t_1,\ t_2 \in \mathbb{R}\right\}$$

$$C = \left\{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z - 14 = 0\right\}$$

Solução:

Rearrumando α : $(x,y,z) = (2,1,0).t_1 + (-1,0,-1).t_2$

O conjunto α é um plano que possui um conjunto de vetores diretores formado por:

$$\bar{u} = (2,1,0)$$
$$\bar{v} = (-1,0,-1)$$

O vetor normal deste plano será paralelo ao produto vetorial destes dois vetores.

$$\bar{n} // \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\hat{i} + 2\cdot\hat{j} - \hat{k} = (-1,\ 2,\ 1)$$

A equação do plano é da forma: $-x + 2y + z + d = 0$. Porém, conhecemos o ponto (por exemplo, fazendo $t_1 = t_2 = 0$) P = (0,1,1) pertencente ao plano.

$$-0 + 2\cdot 1 + 1 + d = 0 \quad \Rightarrow \quad d = -3$$

O conjunto α é, portanto, um plano cuja equação é:

$$-x + 2y + z - 3 = 0$$

Para identificar a equação do conjunto C basta completarmos quadrados:

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + z^2 + 2z + 1 - 14 = 1 + 1$$
$$\Rightarrow (x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 16$$

O conjunto C é portanto, uma esfera de centro em O = (1,0 ,–1) e raio 4.

A interseção dos conjuntos α e C será uma circunferência. A distância do centro da esfera ao plano α vale (resultado 2.4.2):

$$d(O, \alpha) = \frac{|-1 + 2\cdot 0 - 1 - 3|}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{6}}$$

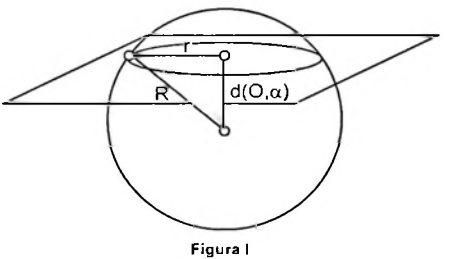


Figura I

Da figura anterior temos, usando o teorema de Pitágoras:

$$d(O, \alpha)^2 + r^2 = R^2 \Rightarrow \frac{25}{6} + r^2 = 16 \Rightarrow r^2 = \frac{71}{6}$$

A área da circunferência é $\pi \cdot r^2 = \frac{71\cdot\pi}{6}$

$$\boxed{\text{Área} = \frac{71\pi}{6} \text{ u.a.}}$$

Exemplo 2.5.b Determine os planos paralelos ao plano $2\cdot x + y - 2\cdot z = 0$ que são tangentes à esfera de centro em (1,1,1) e raio 5.

Solução:

Um plano paralelo ao plano $2\cdot x + y - 2\cdot z = 0$ será sempre da forma:

$$2\cdot x + y - 2\cdot z + d = 0$$

Se o plano deverá ser tangente à esfera, a distância do centro (1,1,1) da esfera até o plano deverá ser igual ao seu raio.

$$R = \frac{|2\cdot 1 + 1 - 2\cdot 1 + d|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{|d+1|}{3} = 5$$

De onde segue que:

$$d + 1 = \pm 15 \Rightarrow d = -16 \text{ ou } d = 14$$

Os planos são, portanto:

$$\boxed{2x + y - 2z - 16 = 0 \text{ e } 2x + y - 2z + 14 = 0}$$

2.6. Exercícios de Fixação

Exercício 2.1 Dados os pontos A = (a,0) e B = (0,b), tomemos sobre a reta AB um ponto C de modo que BC = m·AB(m diferente de zero). Pede-se a equação da reta perpendicular a AB, a qual passa pelo ponto médio do segmento AC.

Exercício 2.2 (ITA - 2009) Sejam C uma circunferência de raio R maior que 4 e centro (0, 0) e AB uma corda de C. Sabendo que (1, 3) é ponto médio de AB: então uma equação da reta que contém AB é?

Exercício 2.3 Obtenha a equação da reta que passa pelo ponto (0,2) que equidista dos dois pontos A = (4,6) e B = (8,3).

Exercício 2.4 Determine y de modo que P(2,y) seja ponto interior do triângulo definido pelas retas $2x - y - 7 = 0$, $4x - y - 11 = 0$ e $10x - 3y - 25 = 0$.

Exercício 2.5 (ITA-2010) Determine a equação da circunferência inscrita no triângulo cujos vértices são A = (1,1), B = (1,7) e C =(5,4) no plano xOy.

Exercício 2.6 Demonstre analiticamente que se 3 pontos no plano são não colineares eles definirão uma circunferência.

Exercício 2.7 (ITA – 2002) Num sistema de coordenadas cartesianas, duas retas r e s, de coeficientes angulares 2 e 1/2 é respectivamente, se interceptam na origem O. Se B pertencente a r, e C pertencente a s são dois pontos no primeiro quadrante tais que o segmento BC é perpendicular a r e a área do triângulo OBC vale 1,2 u.a., então determine a distância de B ao eixo das ordenadas.

Exercício 2.8 Dois lados de um paralelogramo acham-se sobre as retas r e s de equações $3x - 4y + 12 = 0$ e $5x + 6y + 30 = 0$. Obtenha as equações das retas suportes dos outros dois lados, sabendo que um dos vértices do paralelogramo é

Exercício 2.9 (ITA -2009) Considere as n retas r_i: $y = m_i \cdot x + 10$, $i = 1,2,...,n$ em que os coeficientes m_i, em ordem crescente de i, formam uma progressão aritmética de razão $q > 0$. Se $m_1 = 0$ e a reta r_5 tangencia a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 25$, determine o valor de q.

Exercício 2.10 (IME-1990) Considere a família de retas representadas pela equação:

$$y = m \cdot x - \frac{p \cdot (1 + m^2)}{2m},$$

onde p é uma constante positiva dada e m um número real variável.

a) Determine a condição para que num ponto $M = (x_0, y_0)$ do plano cartesiano, passem duas retas dessa família.
b) Determine o LG dos pontos M para os quais as retas que por eles passem sejam perpendiculares.

Exercício 2.11 É dado um cubo de aresta 4. Considere o ponto P variável no espaço de tal forma que a soma dos quadrados das distâncias de P às 6 faces do cubo é constante e vale 48. Determine o Lugar Geométrico de P.

Exercício 2.12 (ITA – 1999 adaptada) Pelo ponto C: (4,–4) são traçadas duas retas que tangenciam a curva dada por $y = (x - 4)^2 + 2$ nos pontos A e B. Calcule a distância do ponto C à reta determinada por A e B.

Exercício 2.13 (IME) A e B são vértices opostos de um cubo. Considere os pontos M, N, P, Q, R, S médios das 6 arestas que não têm extremidades nem em A nem em B. Mostre que esses 6 pontos são coplanares e calcule a área da seção MNPQRS.

Exercício 2.14 ✍ (IME 2003) Seja uma pirâmide quadrangular VABCD de base quadrada de lado L e aresta lateral $L \cdot \sqrt{2}$. Essa pirâmide é cortada por um plano que contém A e corta VC no seu ponto médio. Determinar a área do polígono formado pela seção desse plano nessa pirâmide.

Sugestão: coloque os seus eixos coordenados com origem no centro do quadrado e coincidentes com as diagonais do quadrado e com a altura da pirâmide.

Exercício 2.15 Determine o valor máximo de $z = x + 2 \cdot y$ sabendo-se que:

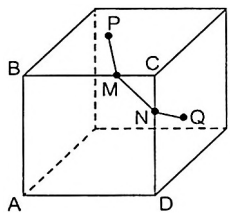
$$x \geq 0,\ y \geq 0,\ 5x + 2y \geq 0,\ 4y - 3x \leq 12$$
$$7x + 9y \leq 63,\ 3x - 4y \leq 12$$

Exercício 2.16 (ITA – 2004) Sejam os pontos A = (2, 0), B = (4, 0) e $P = \left(3, 5 + 2\sqrt{2}\right)$.

a) Determine a equação da circunferência C, cujo centro está situado no primeiro quadrante, passa pelos pontos A e B e à tangente ao eixo y.

b) Determine as equações das retas tangentes à circunferência C que passam pelo ponto P.

Exercício 2.17 ✌ **(IME 2005)** Considere os pontos P e Q sobre faces adjacentes de um cubo. Uma formiga percorre, sobre a superfície do cubo, a menor distância entre P e Q, cruzando a aresta BC em M e a aresta CD em N, conforme ilustrado na figura abaixo.



É dado que os pontos P, Q, M e N são coplanares.

a) Demonstre que MN é perpendicular a AC.

b) Calcule a área da seção do cubo determinada pelo plano que contém P, Q e M em função BC = a e BM = b.

Exercício 2.18 Determinar as retas do feixe a seguir que são tangentes à circunferência de equação $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$

$$A \cdot (3x + 4y - 10) + B \cdot (3x - y - 5) = 0$$

Exercício 2.19 (ITA – 2005) Seja C a circunferência de centro na origem, passando pelo ponto P = (3, 4). Se t é a reta tangente a C por P, determine a circunferência C' de menor raio, com centro sobre o eixo x e tangente simultaneamente à reta t e à circunferência C.

Exercício 2.20 ✍ Mostre que as retas r e s são reversas.

$$\begin{cases} r: x - 1 = \dfrac{y - 1}{2} = -z \\ s: \dfrac{x}{2} = y = -\dfrac{z}{2} \end{cases}$$

Determine a equação dos planos paralelos que contém r e s. Em seguida, determine a equação da reta perpendicular comum às duas retas.

Exercício 2.21 Seja ABC um triângulo e P um ponto no plano de ABC. A perpendicular a AP por P intersecta a reta BC no ponto A'. Analogamente, defina B' e C'. Prove que A', B', C' são colineares.

Exercício 2.22 Seja α o plano que contém a reta $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-2} = z+1$ e o ponto $P = (-1, 0, 2)$. Determine a equação do plano β, paralelo a α, que passa pelo ponto $Q = (3, -2, -1)$.

Exercício 2.23 (IME – 1973) Um círculo de raio R tem seu centro na origem. A tangente ao círculo em um ponto qualquer N, encontra o eixo dos x em M. Por M, traça-se uma paralela ao eixo dos y e por N uma paralela ao eixo dos x, sendo que estas retas se cortam em P. Determine a equação cartesiana do lugar geométrico descrito por P.

Exercício 2.24 (ITA – 2007) Considere, no plano cartesiano xy, duas circunferências C_1 e C_2; que se tangenciam exteriormente em P = (5, 10). O ponto Q =(10,12) é o centro de C_1. Determine o raio da circunferência C_2, sabendo que ela tangencia a reta definida pela equação x = y.

Exercício 2.25 Dadas as retas reversas r que passa pelo ponto (1,1,1) e é paralela ao vetor (2,1,–1) e s que passa por (0,0,0) e é paralela a (1,1,2), determine a equação da perpendicular comum.

Exercício 2.26 (EN – 2007) Considere π o plano que contem o centro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 4z + 13 = 0$ e a reta de equações paramétricas.

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Determine o volume do tetraedro limitado pelo plano e pelos planos coordenados.

Exercício 2.27 Sejam A = (1,1,1), B = (2,3,5) e C = (3,4,0). Determine a equação da altura do triângulo ABC relativa a A.

Exercício 2.28 Sejam x e y reais tais que $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 24 = 0$. Determine o máximo valor de $x^2 + y^2$.

Exercício 2.29 As circunferências distintas C_1 e C_2 estão ambas no primeiro quadrante e são tangentes aos eixos coordenados e à reta $x + y = 3$. Determine a distância entre os centros de C_1 e C_2.

Exercício 2.30 Determine a distância entre os planos $x + 2y - 2z = -1$ e o $2x + 4y - 4z = -4$.

Exercício 2.31 (EN – 2006) Um plano π, ao interceptar os semieixos coordenados positivos, determina sobre estes, segmentos iguais. Sabendo que os pontos $P = (1,-1,2)$ e $Q = (2,2,1)$ pertencem a um plano α, pependicular ao plano π, determine a equação do plano α.

Exercício 2.32 Dois pontos P e Q são ditos inversos com relação a uma circunferência se são colineares com seu centro, situados na mesma semirreta em relação a ele e se o produto de suas distâncias ao centro é igual ao quadrado do raio. Determine o Lugar geométrico dos pontos inversos dos pontos da reta $x + y = 1$ com relação à circunferência centrada em (5,0) e raio 2.

Exercício 2.33 Considere os feixes de retas concorrentes (onde p e q são parâmetros reais) abaixo. Determine a equação da reta comum aos dois feixes.

$$3x - y + 3 + p\cdot(x + y + 1) = 0$$
$$2x + 2y + 2 + q\cdot(4x - y + 2) = 0$$

Exercício 2.34 A reta $2x + y = 0$ contem o diâmetro de uma circunferência. Uma reta que forma um ângulo de 45° com a primeira e tem declive positivo corta a circunferência no ponto (1,1) determina sobre a mesma uma corda com comprimento $10^{-1/2}$ unidades. Estabelecer as equações da segunda reta e da circunferência.

Exercício 2.35 Determine a equação do plano tangente à esfera de equação $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2 = 1$ que está mais longe da origem.

Exercício 2.36 O ponto P = (3,3) é o centro de um feixe de retas no plano cartesiano. Determine as equações das retas desse feixe, perpendiculares entre si, que interceptam o eixo Ox nos pontos A e B, e tais que a distância entre eles seja 15/2.

Exercício 2.37 ✍ Determine a equação da circunferência que passa pelos pontos comuns às circunferências de equações $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 36$ e $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 9$, e também pelo ponto $(2, -4)$.

Exercício 2.38 Considere a circunferência dada por $x^2 + y^2 = 1$. Determine o lugar geométrico dos pontos de potência igual a 5 com relação a esta circunferência.

Exercício 2.39 (EN – 1989) Determine a equação da reta s que passa por $P = (1,-2,1)$ e corta a reta r de equações $x - 1 = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{3}$ tal que r seja perpendicular a s.

Exercício 2.40 Determine a equação da circunferência que passa pelos pontos comuns às circunferências de equações $x^2 + (y+2)^2 = 8$ e $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 9$, e cujo centro está sobre a reta $y = -2x$.

Exercício 2.41 Considere um quadrilátero convexo cujas diagonais coincidem com os eixos coordenados. Sejam os vértices marcados pelas coordenadas $A = (a,0)$, $B = (0,b)$, $C = (c,0)$ e $D = (0,d)$. Mostre que o quadrilátero será inscritível se e somente se $a \cdot c = b \cdot d$.

Exercício 2.42 (International Mathematics Olympiads - 1998) No quadrilátero convexo ABCD, as diagonais AC e BD são perpendiculares e os lados opostos AB e CD não são paralelos. Sabemos que o ponto P, onde se interectam as retas mediatrizes de AB e CD está no interior de ABCD. Prove que o quadrilátero ABCD é inscritível se, e somente se, os triângulos ABP e CDP têm áreas iguais.

Sugestão: Use o resultado do exercício anterior.

Exercício 2.43 Considere as equações paramétricas a seguir.

$$\begin{cases} x = x_0 + r\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right) \\ y = y_0 + r\left(\dfrac{2t}{1+t^2}\right) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Determine o lugar geométrico descrito por essas equações quando t é variado nos reais.

Exercício 2.44 (Círculo de Apolônio) São dados dois pontos A e B no plano. Mostre que o lugar geométrico dos pontos P tais que a razão das distâncias PA e PB seja uma constante k é uma circunferência. Esta circunferência é conhecida como **circunferência de Apolônio do segmento AB.**

3 Seções-Cônicas

3.1. Introdução às Seções Cônicas

Neste capítulo estudaremos um assunto que vem intrigando Matemáticos já há muitos e muitos séculos: As seções cônicas.

O nome já nos dá uma boa indicação do que trata este assunto. Estudaremos, neste capítulo 3, as figuras geométricas resultantes da secção de uma superfície cônica reta. Nos capítulos anteriores já nos deparamos com situações em que "cortamos" cubos e esferas para analisarmos a figura geométrica resultante no plano de secção.

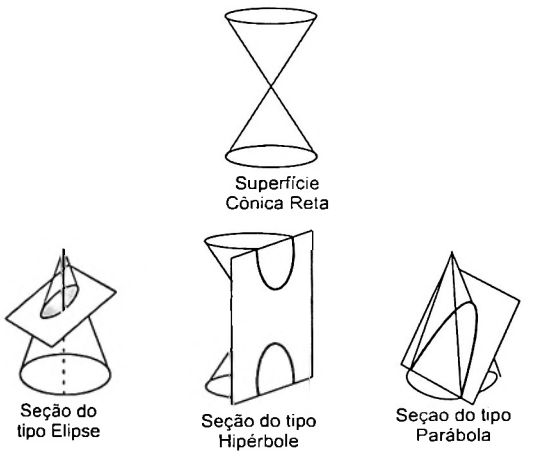


Figura 3.1.1

As seções cônicas estão mais presentes no nosso universo bem mais do que possa aparentar. Você provavelmente já ouviu falar que a Terra percorre uma órbita eliptica em torno do Sol. Um corpo sobre ação puramente gravitacional descreve um movimento que é representado geometricamente por uma seção cônica! Dependendo da energia do sistema, esta órbita pode ser uma elipse, uma hipérbole ou uma parábola. No caso da órbita Terrestre, a órbita é uma elipse, tendo o Sol como um dos Focos desta elipse.

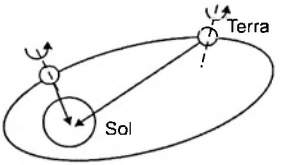


Figura 3.1.2 – Orbita Terra-Sol é uma elipse (Lei de Kepler -1605)

Você sabia que de acordo com a Teoria Aerodinâmica, a forma plana de asa que possui o menor arrasto induzido é uma asa elíptica? O alto custo de fabricação de uma asa elíptica além de problemas decorrentes da distribuição de sustentação uniforme deste tipo de asa (uma asa elíptica estola toda simultaneamente, gerando alguns perigos como perda de controle) não permitiu que aviões com estas asas obtivessem muito sucesso.

Uma das aeronaves mais famosas com este tipo de configuração é o *Spitfire*, o avião de caça britânico (único caça aliado em operação na 2ª Guerra Mundial) projetado por Reginald Mitchell em 1936.

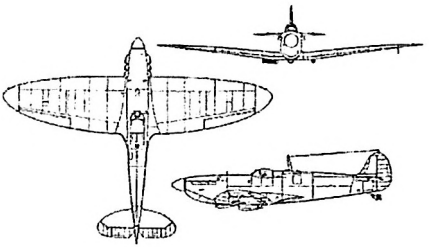


Figura 3.1.3 – Spitfire – caça britânico da 2ª Guerra Mundial

Na área de Eletrônica e Antenas, vemos um dos exemplos mais marcantes da importância do uso de seções cônicas: As antenas parabólicas. A propriedade refletora da parábola (que ainda estudaremos!) permite concentrar todo o sinal de rádio vindo do infinito em um único ponto para melhorar a recepção. A primeira antena refletora parabólica foi construída por Heinrich Hertz em 1888.

No entanto, o interesse nas seções cônicas data de épocas muito mais antigas que o estudo de Kepler para a Astronomia ou as contribuições de Mitchell e Hertz para a Aeronáutica e Eletrônica. Os matemáticos da Grécia Antiga, por exemplo, já estudavam algumas propriedades muito interessantes a respeito destas figuras geométricas. Apolônio de Perga, um dos grandes nomes da História da Geometria, já enunciava a seguinte propriedade de seções do tipo elipse em sua extensa e histórica monografia sobre o assunto.

"Dada uma seção cônica do tipo Elipse, existem dois pontos A e B, pertencentes ao plano cortante, tais que para todo ponto P da curva resultante da seção, a soma das distâncias PA + PB será constante."

Propriedades semelhantes aos demais tipos de seções também já eram geometricamente estudadas na mesma época. Porém, em 1822, um matemático Belga chamado Germinal Pierre Dandelin introduziu uma nova ideia que ajudaria a demonstrar estas famosas propriedades intrínsecas das seções cônicas. Adolphe Quetelet, também belga, e colega de Dandelin também é citado na história como colaborador deste trabalho.

Germinal Pierre Dandelin
(1794 – 1847)

Dada uma posição de um plano que secciona uma superfície cônica no espaço, veremos que existe uma ou duas esferas que são tangentes ao plano e o cone. A estas esferas daremos o nome de **Esferas de Dandelin**.

Chamaremos o ponto em que cada esfera é tangente ao plano de **Foco da Seção Cônica**.

Chamaremos ainda as retas interseção do plano cortante com o plano dos pontos de tangência de cada esfera de **Diretrizes da Seção Cônica**.

Vamos ver isso já já com mais detalhe!

Excentricidade

Considere uma superfície cônica de eixo de revolução reto cortada por um plano. Sendo α o ângulo que cada geratriz do cone faz com o seu eixo vertical e β o ângulo que o plano faz com o mesmo eixo, define-se a **excentricidade** e da seção:

$$e = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$$

Definição 3.1.1

A definição acima é útil pois nos permite caracterizar o tipo de seção apenas pelo parâmetro excentricidade (e). Vejamos:

Caso 1:

O plano é obliquo ao eixo vertical e à geratriz do cone, mas só intercepta uma das partes do cone. A seção resultante é chamada **elipse.**

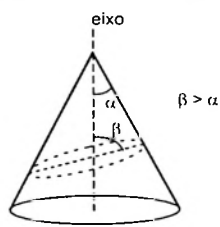


Figura 3.1.4

Neste caso, $0 < \cos\beta < \cos\alpha < 1$.

$$0 < e_{elipse} = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} < 1$$

Caso 2:

O plano é obliquo ao eixo e à geratriz do cone, e intercepta ambas as partes do cone. A seção resultante é chamada **hipérbole.**

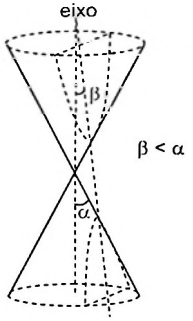


Figura 3.1.5

Neste caso, $0 < \cos\alpha < \cos\beta < 1$.

$$e_{hipérbole} = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} > 1$$

Caso 3:

O plano é paralelo à geratriz do cone, e obliquo ao eixo vertical. A seção resultante é chamada **parábola.**

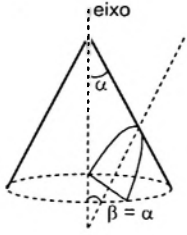


Figura 3.1.6

Neste caso, $\alpha = \beta$, e, logo, $\cos\alpha = \cos\beta$:

$$e_{parábola} = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = 1$$

Caso 4:

O plano é perpendicular ao eixo vertical do cone. A seção resultante é uma **circunferência.**

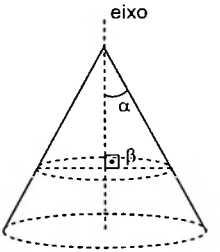


Figura 3.1.7

Para a circunferência, $\cos\beta = \cos 90° = 0$:

$$e_{circunferência} = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = 0$$

Poderíamos ter incluído o caso 4 dentro do caso 1, se considerarmos que a circunferência é um caso particular da elipse. Por enquanto, por motivos didáticos, preferimos citá-los separadamente.

1º Teorema de Dandelin-Quetelet (Elipses)

Considere uma seção cônica do tipo elipse. Imagine as duas esferas de Dandelin inscritas no cone e tangentes ao plano de seção. Os pontos de tangência A e B, denominados **focos da elipse**, são tais que, para todo ponto P pertencente à curva originada:

$$\overline{PA} + \overline{PB} \ \varnothing \text{ constante}$$

Resultado 3.1.1

Demonstração:

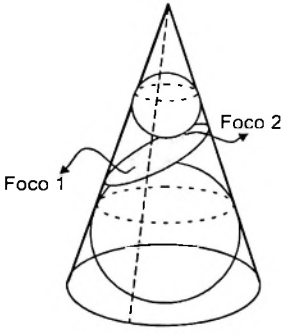


Figura 3.1.8 – Esferas de Dandelin – Seção do Tipo Elipse

A figura acima mostra as esferas de Dandelin para uma seção cônica do tipo Elipse. Consideremos as esferas de Dandelin, tangentes ao plano cortante em A e B. Seja P um ponto qualquer da elipse. Traçamos a geratriz do cone passando por P. Como as esferas de Dandelin são tangentes ao cone, esta geratriz será tangente às esferas em T_A e T_B, como indica a figura 3.1.9.

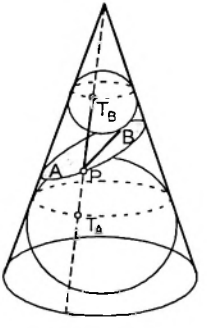


Figura 3.1.9 – 1º Teorema de Dandelin – Elipses

Como P é um ponto externo à menor das esferas, PT_B é tangente à esfera. O mesmo acontece com o segmento PB. Segue então, da propriedade de potência de um ponto com relação à esfera, que:

$$\overline{PT_B} = \overline{PB}$$

Com o raciocínio exatamente análogo para a segunda esfera, tem-se:

$$\overline{PT_A} = \overline{PA}$$

Como $\overline{T_AT_B} = \overline{T_AP} + \overline{PT_B}$, temos que: $\overline{PA} + \overline{PB} = \overline{T_AT_B}$

Agora note que o comprimento T_AT_B será constante e igual à geratriz do tronco de cone destacado para qualquer ponto P que tomarmos sobre elipse.

$$\overline{PA} + \overline{PB} = \text{constante} \quad \square$$

1º Teorema de Dandelin-Quetelet (Hipérboles)

Considere uma seção cônica do tipo hipérbole. Imagine as duas esferas de Dandelin inscritas no cone e tangentes ao plano de seção. Os pontos de tangência A e B, denominados **focos da hipérbole**, são tais que, para todo ponto P pertencente à curva originada:

$$\left|\overline{PA} - \overline{PB}\right| \text{ é constante}$$

Resultado 3.1.2

Demonstração: O raciocínio que demonstra este resultado para o caso hipérbole é análogo ao que foi feito para o caso elipse. Ainda assim, pedimos que o leitor acompanhe atentamente esta demonstração para fixar bem a ideia de Dandelin e Quetelet.

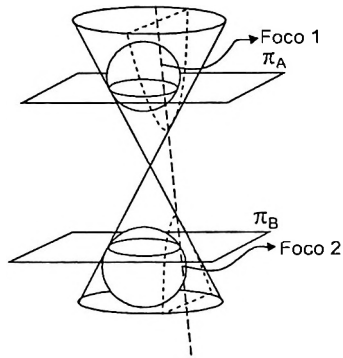


Figura 3.1.10 – Esferas de Dandelin – Seção do Tipo Hipérbole

A figura acima mostra as esferas de Dandelin para uma seção cônica do tipo Hipérbole. Consideremos as esferas de Dandelin, tangentes ao plano cortante em

A e B. Além disso, considere os planos π_A e π_B, os planos da interseção entre cada esfera e o cone.

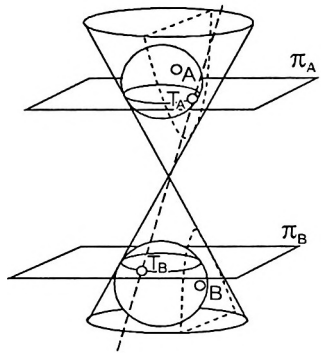


Figura 3.1.11 – Esferas de Dandelin – Seção do Tipo Hipérbole

Seja P um ponto qualquer da hipérbole. Traçamos a geratriz do cone passando por P. Como as esferas de Dandelin são tangentes ao cone, esta geratriz será tangente às esferas em T_A e T_B, como indica a figura 3.1.11. Como P é um ponto externo, PT_B é tangente à esfera. O mesmo acontece com o segmento PB. Segue então, da propriedade de potência de um ponto com relação à esfera, que:

$$\overline{PT_B} = \overline{PB}$$

Com o raciocínio exatamente análogo para a segunda esfera, tem-se:

$$\overline{PT_A} = \overline{PA}$$

Logo:
$$\overline{PT_B} - \overline{PT_A} = \overline{PB} - \overline{PA}$$

Agora note que o comprimento $\overline{PT_B} - \overline{PT_A}$ é igual a geratriz que liga os planos π_A e π_B.

Este comprimento será constante para qualquer P que tomarmos sobre a hipérbole. Com isso:

$$\overline{PB} - \overline{PA} = \text{constante}$$

Se tomássemos P pertencente ao outro ramo da hipérbole, chegaríamos a:

$$\overline{PT_A} - \overline{PT_B} = \overline{PA} - \overline{PB}$$

Neste caso teremos que $\overline{PA} - \overline{PB}$ será constante e igual à constante da diferença encontrada para o outro ramo.

De maneira geral, vale que, sendo P um ponto da hipérbole qualquer:

$$\left|\overline{PB} - \overline{PA}\right| = \text{constante}$$

O teorema que ficou conhecido como 2º Teorema de Dandelin também é demonstrado usando as esferas de Dandelin. Tal teorema já era conhecido pelos matemáticos da Grécia Antiga como Pappus de Alexandria, porém a representação das esferas de Dandelin facilita muito a demonstração.

Curiosamente, não foi o próprio Dandelin que demonstrou o teorema usando sua ideia, mas sim um matemático chamado Pierce Morton alguns anos depois, em 1829.

Como veremos a seguir, a demonstração requer um pouco mais de "visão espacial" que os primeiros resultados de Dandelin-Quetelet. Leia e releia com atenção.

2º Teorema de Dandelin-Quetelet

Considere uma superfície cônica de eixo de revolução reto sendo cortado por um plano π. Se P é um ponto qualquer da interseção, então existe um ponto F e uma reta d fixos, pertencentes ao plano de corte π, tais que:

$$\frac{\overline{PF}}{\overline{Pd}} = e$$

Resultado 3.1.3

Demonstração: Considere a esfera de Dandelin tangente ao cone (seja C a circunferência formada pela interseção desta esfera e do cone). Seja η o plano que contém C.

Seja F o ponto de tangência do plano de seção π , e d a reta resultante da interseção do plano π e do plano η.

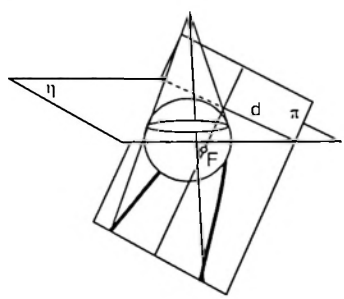


Figura 3.1.12

Seja P o ponto qualquer sobre a seção cônica:

Considere Q, o ponto que é interseção da linha que passa por P e é paralela ao eixo reto do cone e o plano η. Seja A o ponto em que a linha que liga P ao vértice do cone cruza a circunferência C. Seja ainda D a projeção de P sobre a reta d.

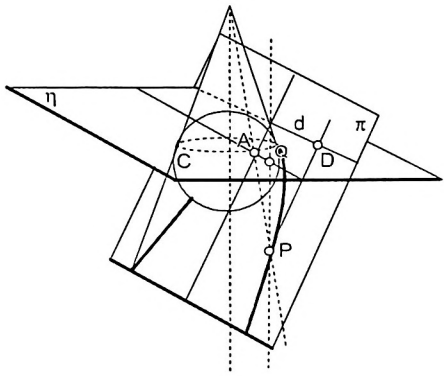


Figura 3.1.13

Vamos destacar o plano que contém os pontos P, Q e A:

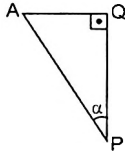


Figura 3.1.14

Note que o ângulo $A\hat{P}Q$ é também o ângulo cada geratriz do cone faz com o seu eixo vertical. Da definição 3.1.1 este ângulo é α.

Como o triângulo PQA é retângulo, temos: $\overline{PQ} = \overline{PA} \cdot \cos\alpha$ (Eq. I)

Vamos destacar o plano que contém os pontos P, Q, e D.

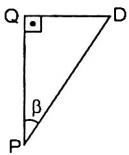


Figura 3.1.15

Note que o ângulo $Q\hat{P}D$ é o ângulo que o plano π faz com o eixo vertical do cone. Da definição 3.1.1 este ângulo é β.

Como o triângulo PQD é retângulo, temos: $\overline{PQ} = \overline{PD} \cdot \cos\beta$ (Eq.II)

De onde segue que:

$$\overline{PA} \cdot \cos\alpha = \overline{PD} \cdot \cos\beta \quad \text{(Eq. III)}$$

Como PA e PF são tangentes à esfera, da propriedade de potência relativa à esfera, tem-se que:

$$\overline{PA} = \overline{PF} \quad \text{(Eq. IV)}$$

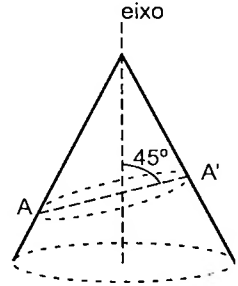
Substituindo (IV) em (III), provamos o teorema:

$$\overline{PF} \cdot \cos\alpha = \overline{PD} \cdot \cos\beta \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{PF}}{\overline{Pd}} = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = e$$

O resultado anterior vale para os 3 tipos de seções cônica. A reta d como definida no enunciado do resultado anterior é chamada **Reta diretriz da seção cônica.** Como no caso das seções do tipo elipse e hipérbole há duas esferas de Dandelin, para estas seções haverá sempre **duas** diretrizes.

Definição 3.1.2

Exemplo 3.1.a (IME 1982 – adaptada) Considere uma seção do tipo elipse, conforme a figura abaixo. São dados: o comprimento AA' = k, a excentricidade da seção igual a $\sqrt{6}/3$ e o ângulo que o plano da elipse forma com o eixo do cone de 45°. Pede-se, em função de k, a distância do vértice V do cone ao plano da elipse.



Solução

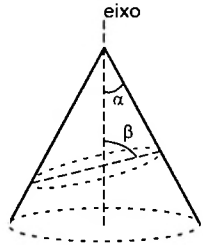
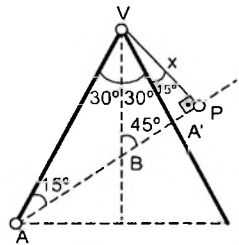


Fig. I

Do enunciado, temos que: $\begin{cases} \beta = 45^\circ \\ e = \dfrac{\sqrt{6}}{3} \end{cases}$

Com isso: $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \quad \therefore \quad \alpha = 30^\circ$

Deseja-se encontrar o valor de x na figura a seguir:



Do triângulo A'PV, temos que: $\overline{VA'} = \dfrac{x}{\cos(15^\circ)}$

Da lei dos senos no triângulo VAA':

$$\frac{\overline{VA'}}{\text{sen}(15^\circ)} = \frac{\overline{AA'}}{\text{sen}(60^\circ)} \Rightarrow \frac{x}{\text{sen}(15^\circ)\cdot\cos(15^\circ)} = \frac{k}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Ora, mas sabemos que:

$$2\text{sen}(15^\circ)\cdot\cos(15^\circ) = \text{sen}(30^\circ) = \frac{1}{2}$$

Logo:

$$\frac{x}{\frac{1}{4}} = \frac{k}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Ou ainda:

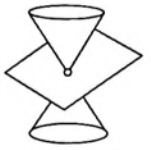
$$\boxed{x = \frac{k \cdot \sqrt{3}}{6}}$$

Degenerações

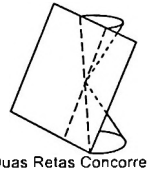
Os casos limites em que o plano que secciona o cone circular reto passa pelo vértice do cone geram figuras geométricas resultantes diferentes das esperadas. Estas figuras geométricas são chamadas de **degenerações da seção cônica.**

Definição 3.1.3

Vejamos na figura abaixo as degenerações de cada tipo de seção cônica.



Ponto
(elipse degenerada)



Duas Retas Concorrentes
(hipérbole degenerada)

Uma única reta
(parábola degenerada)

Figura 3.1.16

Falaremos destes e outros tipos de degenerações das seções cônicas de maneira mais profunda no Capitulo 4.

3.2. Elipses

A primeira das três seções cônicas, que estudaremos mais a fundo neste capitulo, é a elipse. Relembremos o resultado do 1º Teorema de Dandelin- Quetelet, e tomemos o mesmo como definição de Elipse.

Dados dois pontos no plano F e F', não coincidentes, o lugar geométrico dos pontos P tais que a soma das distâncias PF e PF' é constante é uma elipse.

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = \text{constante} = 2a$$

Chamaremos, por conveniência futura, esta constante de 2a.

Definição 3.2.1

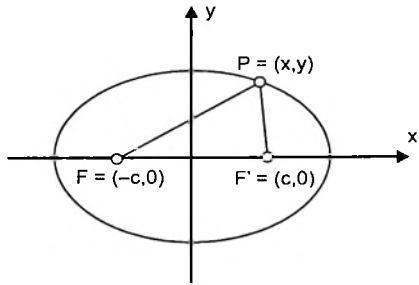


Figura 3.2.1

A condição da existência da elipse é que exista o triângulo PFF'. Ou seja, da condição de existência do triângulo, para existir elipse, é preciso que:

$$\boxed{\overline{FF'} < 2a}$$

Condição de Existência da Elipse

amos representar a equação do lugar geométrico dos pontos P = (x, y) pertencentes a elipse de focos F e F'. Para isto, utilizaremos um par de eixos com um dos eixos coordenados coincidindo com a reta suporte de FF' e o outro coincidindo com a reta mediatriz deste mesmo segmento, como ilustrado na figura 3.2.1.

Da definição temos que: $\overline{PF} = 2a - \overline{PF'}$

Ou ainda: $\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$

Elevando ao quadrado:

$$\Rightarrow (x + c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + (x - c)^2 + y^2$$

$$\Rightarrow \cancel{x^2} + 2xc + \cancel{c^2 + y^2} = 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + \cancel{x^2} - 2xc + \cancel{c^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow 2xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} - 2xc$$

$$\Rightarrow 4xc - 4a^2 = -4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow x\frac{c}{a} - a = -\sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

Nesse passo é importante avaliar os sinais dos dos lados. Como o lado direito é negativo, o lado esquerdo deve ser também, impondo uma condição pro x.

$$\Rightarrow x^2\frac{c^2}{a^2} - 2x\cdot c + a^2 = x^2 - 2x\cdot c + c^2 + y^2$$

$$\Rightarrow x^2\left(\frac{a^2-c^2}{a^2}\right) + y^2 = a^2 - c^2$$

Da condição de existência da elipse temos que $a > c$, e, portanto $a^2 - c^2 > 0$. Chamaremos esta constante convenientemente de b^2.

$$\Rightarrow x^2\cdot\left(\frac{b^2}{a^2}\right) + y^2 = b^2$$

Dividindo dos dois lados por b^2:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Resultado 3.2.1 Forma Canônica da Equação da Elipse com Focos sobre Ox

Se os eixos coordenados forem escolhidos tais que F e F' estejam nos eixos das ordenadas e a mediatriz do segmento FF' esteja sobre o eixo das abscissas, a equação se torna:

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1}$$

Resultado 3.2.2 Forma Canônica da Equação da Elipse com focos sobre Oy

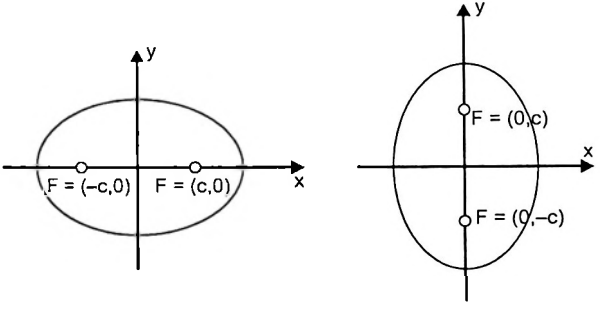


Figura 3.2.2 (a) – Elipse com focos sobre eixo Ox. (b) – Elipse com focos sobre eixo Oy.

A partir da equação da elipse na forma canônica, algumas conclusões podem ser citadas:

(1) A elipse é uma figura geométrica fechada.
(2) Para todo ponto da elipse, o ponto simétrico com relação à origem também pertence à elipse. A origem, neste caso, é chamada de **centro da elipse.**
(3) A aparência da equação da elipse está diretamente ligada ao sistema de eixos escolhido.

Ainda observando a equação da elipse conhecemos os pontos de interseção desta curva com os eixos coordenados.

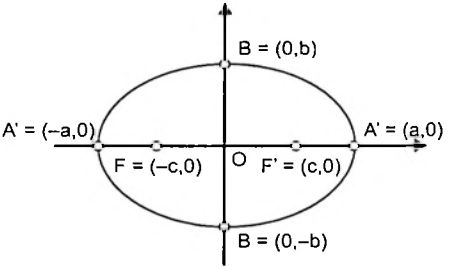


Figura 3.2.3

É comum convencionar-se utilizar os seguintes termos para se referir a uma elipse.

$\overline{AA'}$ = 2a: eixo maior da elipse (a = semieixo maior da elipse)
$\overline{BB'}$ = 2b: eixo menor da elipse (b = semieixo menor da elipse)
$\overline{CC'}$ = 2c: dist ncia focal da elipse (c = semidist ncia focal da elipse)

Definição 3.2.2

Da figura 3.2.3 podemos destacar o triângulo BFF'. Como B pertence à elipse, tem-se por definição que $\overline{BF} + \overline{BF'} = 2a$.

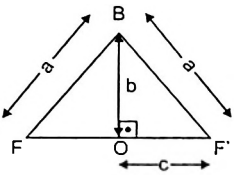


Figura 3.2.4

Da figura 3.2.4, aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo BOF':

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

Resultado 3.2.3 Relação Fundamental da Elipse

Exemplo 3.2.a Determine a equação da elipse tal que o segmento de reta que liga um dos focos a uma das extremidades do eixo menor faz 60° com o seu eixo maior, cujo comprimento é unitário.

Solução:

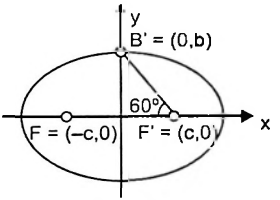


Figura 3.2.5

Da figura acima, temos:

$$\frac{b}{c} = tg\left(60^\circ\right) = \sqrt{3} \quad \therefore \quad b^2 = 3c^2 \quad \text{(Eq. I)}$$

Da relação fundamental da elipse:

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \therefore \quad a^2 = 4c^2 \quad \text{(Eq. II)}$$

Das equações (I) e (II), temos: $b^2 = \frac{3}{4} \cdot a^2$

Sendo $2a = 1$: $a^2 = \frac{1}{4}$, $b^2 = \frac{3}{16}$

A equação da elipse pedida é portanto:

$$\boxed{\frac{x^2}{\frac{1}{4}} + \frac{y^2}{\frac{3}{16}} = 1}$$

Exemplo 3.2.b Considere uma elipse de centro em (x_1, y_1) diferente da origem. Sendo os eixos principais da elipse paralelos aos eixos coordenados Ox e Oy, e o eixo contendo os focos da elipse paralelo a Ox, determine sua equação em função dos seus parâmetros 2.a (comprimento do eixo maior) e 2.b (comprimento do eixo menor).

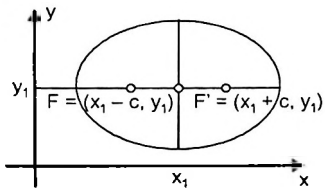


Figura 3.2.6

Solução:

Sendo P = (x, y) um ponto genérico da elipse. Da definição de elipse:

$$\overline{PF} = 2a - \overline{PF'}$$

$$\sqrt{(x-x_1+c)^2 + (y-y_1)^2} = 2a - \sqrt{(x-x_1-c)^2 + (y-y_1)^2}$$

Elevando ao quadrado:

$$\Rightarrow (x - x_1 + c)^2 + \cancel{(y-y_1)^2}$$

$$= 4a^2 - 4a\sqrt{(x - x_1 - c)^2 + (y - y_1)^2} + (x - x_1 - c)^2 + \cancel{(y-y_1)^2}$$

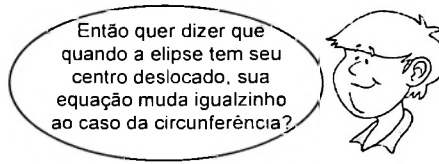
$$\Rightarrow 4(x - x_1)c - 4a^2 = -4a\sqrt{(x - x_1 - c)^2 + (y - y_1)^2}$$

$$\overset{\div 4a}{\Rightarrow} (x - x_1)\frac{c}{a} - a = -\sqrt{(x - x_1 - c)^2 + (y - y_1)^2}$$

Elevando novamente ao quadrado:

$$\Rightarrow (x-x_1)^2 \cdot \frac{c^2}{a^2} - \cancel{2(x-x_1)\cdot c} + a^2 = (x-x_1)^2 - \cancel{2(x-x_1)\cdot c} + c^2 + (y-y_1)^2$$

$$\Rightarrow (x-x_1)^2 \cdot \left(\frac{\overbrace{a^2 - c^2}^{b^2}}{a^2} \right) + (y-y_1)^2 = \overbrace{a^2 - c^2}^{b^2} \Rightarrow \boxed{\frac{(x-x_1)^2}{a^2} + \frac{(y-y_1)^2}{b^2} = 1}$$



OBS.: Exatamente! No exemplo anterior, façamos a seguinte mudança de variaveis:

$$\begin{cases} x' = x - x_1 \\ y' = y - y_1 \end{cases}$$

A equação da elipse de centro (x_1,y_1) e eixos 2.a e 2.b, nas novas variáveis será:

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1$$

O novo sistema de eixos x'oy' resultante da mudança de variáveis transforma a equação da elipse deslocada (ou transladada) na sua forma canônica.

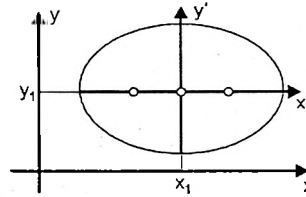


Figura 3.2.7

Geometricamente, a mudança de variáveis deslocou o sistema de eixos x_1 unidades na horizontal e y_1 unidades na vertical (o sentido depende do sinal de x_1 e y_1, que na figura 3.2.7 são positivos). Falaremos um pouco mais deste assunto no capitulo 4.

Exemplo 3.2.c Identifique a curva descrita pela seguinte equação:

$$16x^2 + 9y^2 - 96x + 72y + 144 = 0$$

Solução:

$$16x^2 + 9y^2 - 96x + 72y + 144 = 0$$
$$\Rightarrow 16\left(x^2 - 6x\right) + 9\left(y^2 + 8y\right) + 144 = 0$$

Completando quadrados:

$$\Rightarrow 16\left(x^2 - 6x + \underline{9}\right) + 9\left(y^2 + 8y + \underline{16}\right) + 144 = \underline{16\cdot 9} + \underline{9\cdot 16}$$

$$\Rightarrow 16(x-3)^2 + 9(y+4)^2 = 144$$

$$\overset{\div 144}{\Rightarrow} \frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+4)^2}{16} = 1$$

A curva é portanto, uma elipse centrada em (3,–4), e semieixos iguais a 3 e 4. O eixo focal coincide com o eixo Oy.

Exemplo 3.2.d Identifique a curva descrita pela equação:

$$16x^2 + 9y^2 - 96x + 72y + 288 = 0$$

Solução:

Procedendo como no exemplo anterior, completando quadrados, chega-se a:

$$\Rightarrow 16\cdot(x-3)^2 + 9\cdot(y+4)^2 = 0$$

O lado esquerdo é a soma de dois números não negativos resultando em zero. Isto só ocorre quando ambos os termos forem zero!

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = -4 \end{cases}$$

Logo a equação representa um único ponto (3,–4). Embora a equação pareça representar uma elipse, trata-se de uma "degeneração" da elipse em um ponto. Portanto, cuidado!

Excentricidade da Elipse

A excentricidade de uma cônica qualquer já foi definida (definição 3.1.1). Vejamos agora um resultado impressionante a respeito da excentricidade!

Considere a elipse de semieixo maior a e semidistância focal c. A excentricidade da elipse pode ser expressa como:

$$0 < e = \frac{c}{a} < 1$$

Resultado 3.2.4

Observe que, da condição de existência da elipse vê-se imediatamente que c/a é uma constante entre 0 e 1. Vamos provar que esta constante é exatamente a mesma que a excentricidade que já definimos (definição 3.1.1).

Demonstração:

Utilizemos o 2º Teorema de Dandelin (Resultado 3.1.3). Para todo ponto P da elipse de foco F, existirá uma reta d tal que:

$$\frac{\overline{PF}}{\overline{Pd}} = e$$

Para facilitarmos a visualização, escolhamos inteligentemente o sistema de eixos coordenados. Seja este tal que o eixo Oy coincida com a reta diretriz d, e o eixo Ox contenha o ponto F.

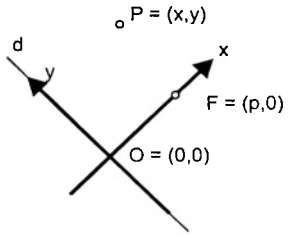


Figura 3.2.8

Além disso, chamemos a distância OF de p, onde p é uma constante dados d e F. Desta forma, seja P = (x,y) um ponto qualquer da elipse.

$$\frac{\overline{PF}}{\overline{Pd}} = e \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{(x-p)^2 + y^2}}{|x|} = e$$

Elevando ao quadrado a equação acima:

$$(x-p)^2 + y^2 = e^2 \cdot x^2 \quad \therefore \quad x^2 \cdot (1-e^2) - 2p \cdot x + y^2 + p^2 = 0$$

A equação acima deve ser satisfeita para todo ponto da elipse. Como para a elipse, a excentricidade é uma constante entre 0 e 1, temos que $e^2 < 1$, e portanto podemos dividir a equação por $(1 - e^2)$.

$$x^2 - \left(\frac{2p}{1-e^2}\right) \cdot x + \frac{y^2}{1-e^2} + \frac{p^2}{1-e^2} = 0$$

Completando quadrados:

$$x^2 - \left(\frac{2p}{1-e^2}\right)\cdot x + \frac{y^2}{1-e^2} + \frac{p^2}{\left(1-e^2\right)^2} + \frac{p^2}{1-e^2} = \frac{p^2}{\left(1-e^2\right)^2}$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{p}{1-e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = \left(\frac{p\cdot e}{\left(1-e^2\right)}\right)^2$$

Fazendo $\left(x - \frac{p}{1-e^2}\right) = x'$, $y = y'$, teremos:

$$\frac{x'^2}{\left(\frac{p\cdot e}{1-e^2}\right)^2} + \frac{y'^2}{\left(\frac{p\cdot e}{\sqrt{1-e^2}}\right)^2} = 1$$

A primeira vista, fica difícil interpretar o que acabamos de descobrir. Conforme vimos rapidamente na observação do Exemplo 3.2.b, a mudança de variáveis que fizemos é uma **translação de eixos**.

A equação obtida neste sistema de eixos é a equação da elipse na forma canônica.

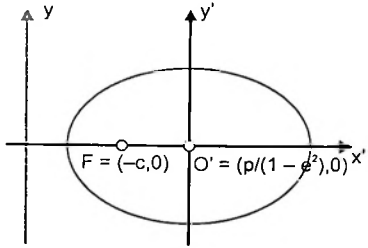


Figura 3.2.9

Da equação obtida, temos:

$$\begin{cases} a = \dfrac{p\cdot e}{1-e^2} \\ b = \dfrac{p\cdot e}{\sqrt{1-e^2}} \end{cases}$$

Dividindo uma equação pela outra

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \Rightarrow a^2\cdot\left(1-e^2\right) = b^2$$

Lembrando que, para a elipse $a^2 = b^2 + c^2$ teremos:

$$a^2 \cdot (1 - e^2) = a^2 - c^2 \quad \Rightarrow \quad a^2 - a^2 \cdot e^2 = a^2 - c^2$$

$$\Rightarrow \quad c^2 = a^2 \cdot e^2 \quad \therefore \quad e = \frac{c}{a} \quad \square$$

A escolha pela letra p para designar a distância entre um foco e sua diretriz mais próxima não foi ao caso. Esta distância é chamada, muitas vezes, de **parâmetro focal da elipse**, ou simplesmente, **parâmetro da elipse (p)**.

Definição 3.2.3

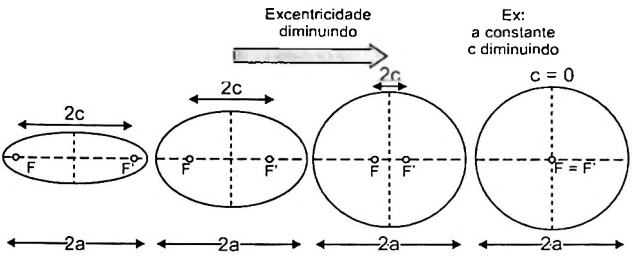


Figura 3.2.10

Quanto mais a distância focal 2c se aproximar do comprimento do eixo maior 2a da elipse, ou ainda, quanto mais próximo de 1 for a excentricidade, mais achatada a mesma será. Se a distância focal 2c se aproxima de zero, (se a excentricidade se aproxima de zero), a elipse se torna mais arredondada.

OBS.: Os casos limites e = 0, bem como e = 1 resultam no que chamamos de **degenerações** da elipse. A elipse degenerada devido à excentricidade e = 1 *é um segmento de reta de comprimento 2.a. Já no caso e = 0, trata-se de* uma elipse se degenerando em uma circunferência.

Exemplo 3.2.e Considere a elipse centrada na origem, de excentricidade 1/2 e focos sobre o eixo das ordenadas. Dê sua equação sabendo que o seu eixo menor tem comprimento 4.

Solução: Dos dados do enunciado e da relação fundamental da Elipse:

$$\begin{cases} 2b = 4 \\ \dfrac{c}{a} = \dfrac{1}{2} \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a^2 = \frac{16}{3}, \quad b^2 = 4$$

Usando a representação da forma canônica para elipses com focos sobre Ou (Resultado 3.2.2), temos que a equação da elipse será dada por:

$$\boxed{\frac{x^2}{4} + \frac{3y^2}{16} = 1}$$

Equação das Retas Diretrizes

Considere um sistema de coordenadas tal que a equação da elipse esteja na forma canônica:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

A equação das retas diretrizes (associadas a cada foco), neste caso serão:

$$\text{diretrizes: } x = \pm\frac{a^2}{c}$$

Resultado 3.2.5

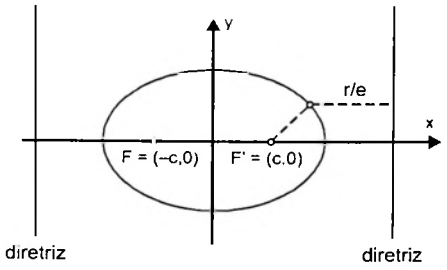


Figura 3.2.11

Demonstração:

O resultado acima é uma consequência do desenvolvimento feito para a demonstração do resultado 3.2.4, onde vimos que um sistema de eixos tal que o eixo Ox contém os focos da elipse e o eixo Oy é paralelo à diretriz nos dá a equação da elipse na sua forma canônica:

$$\frac{x'^2}{\left(\frac{p\cdot e}{1-e^2}\right)^2} + \frac{y'^2}{\left(\frac{p\cdot e}{\sqrt{1-e^2}}\right)^2} = 1$$

Onde p, o parâmetro da elipse, é a distância do foco à diretriz mais próxima. Esta conclusão nos permite dizer, trivialmente, que as retas diretrizes são paralelas ao eixo menor da elipse.

Do desenvolvimento da demonstração anterior, temos que a distância do eixo menor da elipse à diretriz vale $p/(1 - e^2)$, e com isso a equação das diretrizes são, neste sistema de eixos:

$$x = \pm \frac{p}{1 - e^2}$$

Mas, também do desenvolvimento sabemos que:

$$a = \frac{p \cdot e}{1 - e^2}$$

Finalmente, temos as equações das retas diretrizes:

$$x = \pm \frac{a}{e} = \pm \frac{a}{\frac{c}{a}} = \pm \frac{a^2}{c} \quad \square$$

Como **exercício**, reflita para onde tendem as retas diretrizes quando a elipse tende a se degenerar em uma circunferência?

Do desenvolvimento acima é possível também descobrir o valor do parâmetro da elipse em função dos parâmetros a, b e c da elipse.

$$a = \frac{p \cdot e}{1 - e^2} \Rightarrow a = \frac{p \cdot c}{a\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)} = \frac{p \cdot c \cdot a}{\left(a^2 - c^2\right)} = \frac{p \cdot c \cdot a}{b^2} \Rightarrow p = \frac{b^2}{c}$$

O parâmetro p da elipse (de distância focal c e eixo menor b), definido como a distância de um foco à diretriz mais próxima vale:

$$p = \frac{b^2}{c}$$

Resultado 3.2.6

Raio Vetor da Elipse

Dada uma elipse e um ponto P pertence à mesma, o vetor que liga um foco a P é chamado de **raio vetor** (também chamado de **raio focal**) da elipse relativo ao ponto P.

Para cada ponto P da elipse, há exatamente 2 raios vetores.

Definição 3.2.4

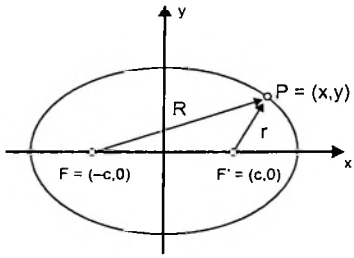


Figura 3.2.12

É possivel calcular uma expressão simplificada do comprimento dos raios vetores relativos a um ponto P. Vejamos a seguir:

Comprimento dos Raios Vetores:

Considere a elipse dada na figura 3.2.6, com excentricidade e, e o ponto $P = (x_0, y_0)$.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Os comprimentos dos raios vetores relativos a P são:

$$R = \overline{PF} = a + e \cdot x_0$$

$$r = \overline{PF'} = a - e \cdot x_0$$

Resultado 3.2.7

Demonstração:

$$\overline{PF} = 2 \cdot a - \overline{PF'}$$

$$\Rightarrow R^2 = (2a - r)^2 \Rightarrow R^2 = 4a^2 - 4a \cdot r + r^2$$

$$\Rightarrow \left((x_0 + c)^2 + y_0^2\right) = 4a^2 - 4a \cdot r + \left((x_0 - c)^2 + y_0^2\right)$$

$$\Rightarrow 2x_0 \cdot c + \cancel{x_0^2 + e^2 + y_0^2} = 4a^2 - 4a \cdot r - 2x_0 \cdot c + \cancel{x_0^2 + e^2 + y_0^2}$$

$$\Rightarrow 4a \cdot r = 4a^2 - 4x_0 \cdot c \Rightarrow r = a - x_0 \cdot \left(\frac{c}{a}\right) = a - e \cdot x_0$$

Como R + r = 2a, pela definição de elipse:

$$R = 2a - (a - e \cdot x_0) = a + e \cdot x_0$$

Forma Polar do Raio Vetor:

Considere o raio vetor relativo a um foco F e a um ponto P da elipse. Seja θ o ângulo que o raio vetor faz com o eixo que contém o foco F. O comprimento deste raio vetor será dado por:

$$r = \frac{p \cdot e}{1 + e \cdot \cos\theta}$$

Resultado 3.2.8

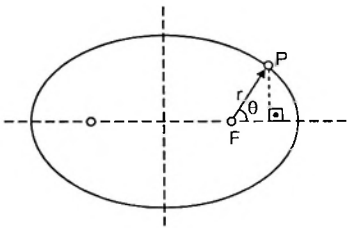


Figura 3.2.13

Da figura, temos: $x = c + r \cdot \cos\theta$

Do resultado 3.1.6: $r = a - e \cdot x \Rightarrow x = \frac{a - r}{e}$

Com isso:

$$\frac{a-r}{e} = c + r \cdot \cos\theta \Rightarrow \frac{a^2}{c} = c + r \cdot \left(\frac{1}{e} + \cos\theta\right)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{a^2 - c^2}{c}}_{=\frac{b^2}{c}=p} = r \cdot \left(\frac{1 + e \cdot \cos\theta}{e}\right) \Rightarrow r = \frac{p \cdot e}{1 + e \cos\theta}$$

Se prolongarmos o segmento PF até atingir novamente a elipse em P', o segmento PP' será uma chamada **corda focal.** De maneira geral, definimos:

Se P e P' são dois pontos da elipse tal que o segmento PP' contém um foco F, então PP' é chamado de uma **corda focal** da elipse.

Definição 3.2.5

Forma Polar de uma Corda Focal;

Considere uma corda focal definida pelo segmento PP', com P e P' sobre a elipse, passando por um foco. Seja θ o ângulo que a corda faz com o eixo que contém o foco F. O comprimento desta corda PP' será:

$$\overline{PP'} = \frac{2 \cdot p \cdot e}{1 - e^2 \cdot \cos^2 \theta}$$

Resultado 3.2.9

Considere r' o comprimento de P'F

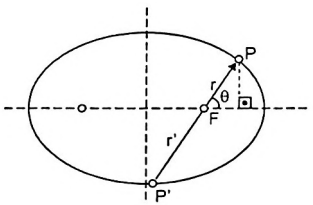


Figura 3.2.13

Do resultado 3.1.7, temos: $\begin{cases} r = \dfrac{p \cdot e}{1 + e \cdot \cos\theta} \\ r' = \dfrac{p \cdot e}{1 + e \cdot \cos(\pi + \theta)} = \dfrac{p \cdot e}{1 - e \cdot \cos\theta} \end{cases}$

Com isso, o comprimento de uma corda focal qualquer será dado por:

$$\overline{PP'} = \frac{p \cdot e}{1 + e \cdot \cos\theta} + \frac{p \cdot e}{1 - e \cdot \cos\theta} = \frac{2p \cdot e}{1 - e^2 \cdot \cos^2 0}$$

Exemplo 3.2.f Determine o comprimento da corda focal que faz 120° com o eixo focal e cujo um dos extremos é um dos extremos do eixo menor da elipse. É dado que para esta elipse, a distância focal vale 30.

Solução:

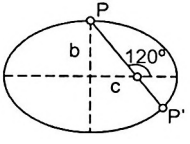


Figura I

$$\frac{b}{c} = tg\left(60^o\right) = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} b^2 = 3c^2 \\ a^2 = b^2 + c^2 = 4c^2 \end{cases}$$

Aplicando o resultado 3.2.9:

$$\overline{PP'} = \frac{2p\ e}{1 - e^2 \cdot \cos^2\theta} = \frac{2 \cdot \frac{b^2}{a}}{1 - \frac{c^2}{a^2} \cdot \cos^2\left(120^o\right)} = \frac{2 \cdot 3 \cdot c^2}{1 - \frac{c^2}{4 \cdot c^2}\ \frac{2c}{1}} = \frac{3c}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{48c}{15}$$

Como $2c = 30$, chegamos a: $\boxed{\overline{PP'} = 48}$

Latus Rectum

A corda focal perpendicular ao eixo que contém os focos da elipse de semieixos a e b tem comprimento igual a:

$$\lambda = \frac{2b^2}{a}$$

Este comprimento é chamado de **Latus Rectum** da Elipse.

Resultado 3.2.10

Demonstração:

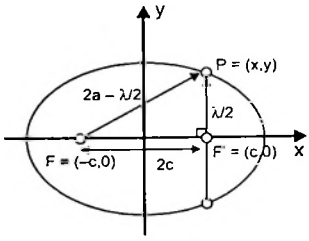


Figura 3.2.14

Do teorema de Pitágoras no triângulo PFF' da figura acima, tem-se:

$$\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 + (2c)^2 = \left(2a - \frac{\lambda}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \cancel{\left(\frac{\lambda^2}{4}\right)} + 4c^2 = 4a^2 - 2a \cdot \lambda + \cancel{\left(\frac{\lambda^2}{4}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = \frac{2\left(a^2 - c^2\right)}{a} = \frac{2b^2}{a} \quad \square$$

Exemplo 3.2.g Dentre todas as cordas focais da elipse, mostre que a de comprimento mínimo tem comprimento igual ao Latus Rectum.

Solução:

A expressão de uma corda focal é dada por (Resultado 3.2.9)

$$\overline{PP'} = \frac{2p \cdot e}{1 - e^2 \cdot \cos^2 \theta}$$

O numerador desta expressão é uma constante para cada dada elipse. O comprimento será portanto, mínimo quando for máxima a expressão:

$$f(\theta) = 1 - e^2 \cdot \cos^2 \theta$$

A expressão de f acima será máxima, quando $\cos^2\theta$ for mínimo. Ora, mas sabemos que $-1 \leq \cos\theta \leq -1$, logo $0 \leq \cos^2 \theta \leq 1$.

Com essas informações, sabemos que a corda focal será mínima quando $\cos\theta = 0$, ou seja, quando $\theta = 90°$.

A corda focal que faz 90° com o eixo focal é o **Latus Rectum.**

Exemplo 3.2.h (IME-2005 adaptada) Considere uma elipse dada de focos F e F', e M um ponto qualquer dessa curva. Traça-se por M duas secantes MF e MF', e que interceptam a elipse em P e P', respectivamente.

a) Mostre que $\frac{1}{\overline{MF}} + \frac{1}{\overline{FP}}$ é constante.

b) Mostre que $\frac{\overline{MF}}{\overline{FP}} + \frac{\overline{MF'}}{\overline{F'P'}}$ é constante.

Solução:

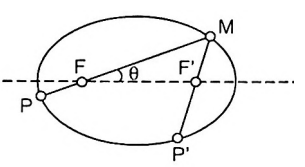


Figura I

a) Usando o resultado 3.2.8, temos:

$$\begin{cases} \overline{MF} = \dfrac{p \cdot e}{1 + e \cdot \cos\theta} \\ \overline{FP} = \dfrac{p \cdot e}{1 + e \cdot \cos(\pi + \theta)} = \dfrac{p \cdot e}{1 - e \cdot \cos\theta} \end{cases}$$

Logo:

$$\frac{1}{\overline{MF}} + \frac{1}{\overline{FP}} = \frac{1 + e\cdot\cos\theta}{p\cdot e} + \frac{1 - e\cdot\cos\theta}{p\cdot e} = \frac{2a}{b^2} = \text{constante}$$

b) Analogamente, mostra-se que:

$$\frac{1}{\overline{MF'}} + \frac{1}{\overline{F'P'}} = \frac{2a}{b^2}$$

Logo:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\overline{MF}} + \dfrac{1}{\overline{FP}} = \dfrac{2a}{b^2} \\ \dfrac{1}{\overline{MF'}} + \dfrac{1}{\overline{F'P'}} = \dfrac{2a}{b^2} \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por MF e a segunda por MF', temos:

$$\begin{cases} 1 + \dfrac{\overline{MF}}{\overline{FP}} = \dfrac{2a}{b^2}\cdot\overline{MF} \\ 1 + \dfrac{\overline{MF'}}{\overline{F'P'}} = \dfrac{2a}{b^2}\cdot\overline{MF'} \end{cases}$$

Somando as equações acima:

$$\frac{\overline{MF}}{\overline{FP}} + \frac{\overline{MF'}}{\overline{F'P'}} = \frac{2a}{b^2}\underbrace{\left(\overline{MF} + \overline{MF'}\right)}_{-2a} - 2 = \frac{4a^2}{b^2} - 2 = \text{constante}$$

Reta Tangente à Elipse

Equação da Reta Tangente à Elipse:

Considere a elipse dada a seguir e o ponto $P = (x_0, y_0)$.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

A equação da reta tangente à elipse em P é dada por:

$$\left(\frac{x_0}{a^2}\right)\cdot x + \left(\frac{y_0}{b^2}\right)\cdot y = 1$$

Resultado 3.2.11

Demonstração:

Se P é um dos dois pontos da elipse sobre o eixo horizontal, (a,0) e (–a,0) é trivial perceber que o resultado acima é válido. Note que a reta tangente nestes casos será x = a e x= -a, respectivamente, o que respeita a equação citada:

$$P = (a, 0) \Rightarrow \left(\frac{x_0}{a^2}\right) x + \left(\frac{y_0}{b^2}\right) \cdot y = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{a^2}\right) x + \left(\frac{0}{b^2}\right) y = 1 \Leftrightarrow x = a$$

$$P = (-a, 0) \Rightarrow \left(\frac{x_0}{a^2}\right) \cdot x + \left(\frac{y_0}{b^2}\right) \cdot y = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{-a}{a^2}\right) x + \left(\frac{0}{b^2}\right) \cdot y = 1 \Leftrightarrow x = -a$$

Vamos provar que o resultado vale para todos os demais pontos da elipse. Uma reta qualquer pode ser representada por $y = m \cdot x + h$. Como P pertence à reta, temos:

$$y_0 = m \cdot x_0 + h \Rightarrow h = y_0 - m \cdot x_0$$

O sistema abaixo nos dá as interseções da elipse e da reta:

$$\begin{cases} y = m \cdot (x - x_0) + y_0 \\ b^2 \cdot x^2 + a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2 \end{cases}$$

Para que a reta seja tangente, a solução do sistema deve ser única!

$$b^2 \cdot x^2 + a^2 \cdot (m \cdot (x - x_0) + y_0)^2 = a^2 \cdot b^2$$

$$\Rightarrow b^2 \cdot x^2 + a^2 \cdot \left(m^2 \cdot (x - x_0)^2 + 2m \cdot (x - x_0) \cdot y_0 + y_0^2\right) = a^2 \cdot b^2$$

$$\Rightarrow x^2 \left(b^2 + a^2 \cdot m^2\right) + x \cdot \left(2m \cdot a^2 \cdot (y_0 - m \cdot x_0)\right) + a^2 \cdot (y_0 - m \cdot x_0)^2 - a^2 \cdot b^2 = 0$$

Como o ponto P deve ser tangente, a solução desta equação do 2º grau deve ser única! Algo nos diz que devemos calcular o discriminante da equação acima e obrigá-lo a ser nulo. De fato, este é um caminho.

Tente e logo verá que as contas se complicam. Ora, a equação é do segundo grau, que só pode ter uma única solução. Mas conhecemos esta solução! Trata-se de $x = x_0$. Podemos dizer então que:

$$x^2 \cdot \left(b^2 + a^2 \cdot m^2\right) + x \cdot \left(2m \cdot a^2 \cdot (y_0 - m \cdot x_0)\right) + a^2 \cdot (y_0 - m \cdot x_0)^2 - a^2 \cdot b^2$$
$$\equiv \left(b^2 + a^2 \cdot m^2\right) \cdot (x - x_0)^2$$

Da identidade:

$$\begin{cases} \left(b^2 + a^2 \cdot m^2\right) \cdot x_0 = m^2 \cdot a^2 \cdot x_0 - m \cdot a^2 \cdot y_0 \\ \left(b^2 + a^2 \cdot m^2\right) \cdot x_0^2 = a^2 \cdot (y_0 - m \cdot x_0)^2 - a^2 \cdot b^2 \end{cases}$$

Desenvolvendo a primeira equação resultante da identidade de Polinômios acima, temos:

$$m = -\frac{b^2 \cdot x_0}{a^2 \cdot y_0}$$

Como a reta contém o ponto $P = (x_0, y_0)$:

$$y_0 = \left(-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_0}{y_0}\right)\cdot x_0 + h \Rightarrow h = y_0 + \frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_0}{y_0} = \frac{b^2}{y_0}\cdot\underbrace{\left(\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{x_0^2}{a^2}\right)}_{=1 \text{ pois P pertence à elipse}} = \frac{b^2}{y_0}$$

Com isso, temos que a equação da reta tangente é dada por:

$$y = \left(-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_0}{y_0}\right)\cdot x + \frac{b^2}{y_0} \quad \therefore \quad \frac{y \cdot y_0}{b^2} + \frac{x \cdot x_0}{a^2} = 1 \quad \square$$

OBS.: Para quem já está familiarizado com Cálculo e o conceito de derivadas, poderíamos ter demonstrado o resultado com o seguinte raciocínio.

Seja $y = m \cdot x + h$ a reta que buscamos. Sabendo que na equação da elipse y pode ser descrito como uma função de x, derivamos a equação dos dois lados com respeito à variável x:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{d}{dx}\cdot\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2(x)}{b^2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{2x}{a^2} + \frac{2y \cdot y'}{b^2} = 0$$

$$\frac{y \cdot y'}{b^2} = -\frac{x}{a^2} \Rightarrow y' = -\frac{b^2}{a^2}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)$$

Substituindo (x,y) pelas coordenadas (x_0, y_0) de P conheceremos a inclinação a reta tangente à curva $y = y(x)$. Tal inclinação é justamente o coeficiente angular m da reta que buscamos.

$$m = -\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_0}{y_0}$$

O restante da demonstração é igual feito acima.

Exemplo 3.2.i Considere uma Elipse de semi-eixos a e b e eixo maior definido pelo segmento AA'. Seja PP' uma tangente variável em um ponto M da elipse, de modo que P e P' estejam sempre nas retas verticais que passam por A e A', respectivamente. Demonstre que o produto AP.A 'P' é constante.

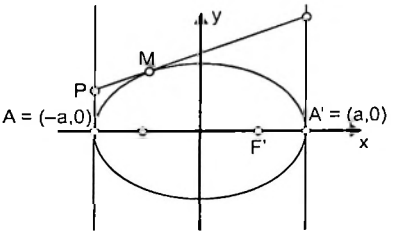


Figura 3.2.15

Solução:

Seja $M = (x_0, y_0)$. A equação da reta suporte do segmento PP' será

$$\left(\frac{x_0}{a^2}\right) \cdot x + \left(\frac{y_0}{b^2}\right) \cdot y = 1$$

Como P e P' estão nas retas $x = -a$ e $x = a$, respectivamente, as coordenadas destes pontos em função de x_0, y_0 são:

$$P = \left(-a, \frac{b^2}{y_0} + \frac{b^2 \cdot x_0}{a \cdot y_0}\right)$$

$$P' = \left(a, \frac{b^2}{y_0} - \frac{b^2 \cdot x_0}{a \cdot y_0}\right)$$

Com isso:

$$\overline{AP} \cdot \overline{A'P'} = \left(\frac{b^2}{y_0} + \frac{b^2 \cdot x_0}{a \cdot y_0}\right) \cdot \left(\frac{b^2}{y_0} - \frac{b^2 \cdot x_0}{a \cdot y_0}\right) = \frac{b^4}{y_0^2} \cdot \left(1 - \frac{x_0^2}{a^2}\right)$$

Lembrando que M pertence à elipse: $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$

$$\Rightarrow \quad \overline{AP} \cdot \overline{A'P'} = \frac{b^4}{y_0^2} \cdot \left(\frac{y_0^2}{b^2}\right) = b^2 = \text{constante}$$

Exemplo 3.2.j Mostre que as retas não verticais $y = m \cdot x \pm \sqrt{a^2 \cdot m^2 + b^2}$ são sempre tangentes à elipse dada por:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Solução:

Considere uma reta não-vertical qualquer de equação $y = m \cdot x + h$. Esta reta será tangente à elipse quando o sistema abaixo tiver apenas uma solução:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = m \cdot x + h \end{cases}$$

Do sistema:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{m^2 \cdot x^2 + 2m \cdot h \cdot x + h^2}{b^2} = 1$$

$$\Rightarrow \left(b^2 + a^2 \cdot m^2\right) \cdot x^2 + \left(2a^2 \cdot m \cdot h\right) \cdot x + a^2 \cdot \left(h^2 - b^2\right) = 0$$

Para que a solução seja única, a equação do segundo grau acima deve ter determinante nulo.

$$\Delta = 4a^4 \cdot m^2 \cdot h^2 - 4a^2 \cdot \left(b^2 + a^2 \cdot m^2\right) \cdot \left(h^2 - b^2\right) = 0$$

$$\overset{\div 4a^2}{\Rightarrow} a^2 \cdot m^2 \cdot h^2 - \left(b^2 + a^2 \cdot m^2\right) \cdot h^2 + b^2 \cdot \left(b^2 + a^2 \cdot m^2\right) = 0$$

$$\Rightarrow h^2 \cdot \left(\cancel{a^2 \cdot m^2} - b^2 - \cancel{a^2 \cdot m^2}\right) + b^2 \cdot \left(b^2 + a^2 \cdot m^2\right) = 0$$

$$\overset{+b^2}{\Rightarrow} h^2 = b^2 + a^2 \cdot m^2$$

Ou seja, as retas $y = m \cdot x \pm \sqrt{a^2 \cdot m^2 + b^2}$ sempre tangente à elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

OBS.: O resultado acima é muito importante e poderá ser aplicado em diversas questões antigas do IME e do ITA. Para aqueles que gostam de truques, vale a pena tentar guardar este! A seguir ilustramos um exemplo cuja solução se torna muito elegante usando o resultado mostrado.

Exemplo 3.2.k Use o resultado do exemplo anterior e determine a Equação (e identifique o Lugar Geométrico descrito) da interseção de duas tangentes perpendiculares a uma elipse dada.

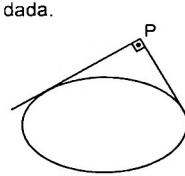


Figura 3.2.16

Solução:

Considere a representação da elipse na forma canônica: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Conforme demonstrado no exemplo anterior, uma das tangentes pode ser escrita de forma:

$$y = m \cdot x \pm \sqrt{a^2 \cdot m^2 + b^2}$$

A segunda tangente deve ser perpendicular a esta, logo sua equação deve ser da forma:

$$y = -\frac{1}{m} \cdot x + h$$

Novamente, usando o exemplo anterior, para que a reta acima seja tangente à elipse, devemos ter:

$$h = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{m^2}}$$

Logo, as equações de duas retas tangentes à elipse, e perpendiculares entre si, são da forma:

$$\begin{cases} y = m \cdot x + \sqrt{a^2 \cdot m^2 + b^2} \\ y = -\frac{1}{m} \cdot x + \sqrt{\frac{a^2}{m^2} + b^2} \end{cases} \therefore \begin{cases} y - m \cdot x = \sqrt{a^2 \cdot m^2 + b^2} \\ m \cdot y + x = \sqrt{a^2 + m^2 \cdot b^2} \end{cases}$$

Elevemos ambas as equações acima ao quadrado:

$$\begin{cases} y^2 + m^2 \cdot x^2 - 2m \cdot x \cdot y = a^2 \cdot m^2 + b^2 \\ m^2 \cdot y^2 + x^2 + 2m \cdot x \cdot y = a^2 + m^2 \cdot b^2 \end{cases}$$

Seja $P = (x_0, y_0)$ a interseção destas duas retas. Somemos as duas equações acima aplicadas no ponto P.

$$x_0^2 \cdot \cancel{(1 + m^2)} + y_0^2 \cdot \cancel{(1 + m^2)} = a^2 \cdot \cancel{(1 + m^2)} + b^2 \cdot \cancel{(1 + m^2)}$$

A equação do lugar geométrico de P será:

$$\boxed{x_0^2 + y_0^2 = a^2 + b^2}$$

Esta equação nos diz que o L.G. da interseção de duas retas perpendiculares tangentes a uma elipse representa uma **circunferência** de centro coincidente com o centro da elipse e raio $\sqrt{a^2 + b^2}$.

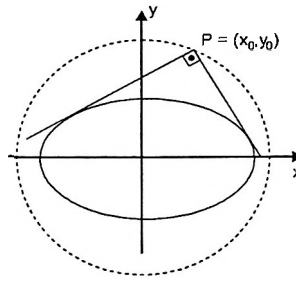


Figura I

3.3. Análise Geométrica das Elipses

Nós iniciamos a seção 3.2 deduzindo a equação de uma elipse analiticamente. Até o momento, o tratamento a respeito das propriedades da elipse foi feito quase que inteiramente por meio do algebrismo da Geometria Analítica.

Muitas vezes, ao se deparar com uma questão de seções cônicas, o aluno automaticamente pensa em uma escolha de par de eixos para atacar o problema. Embora em muitos casos esta seja uma excelente abordagem, veremos nesta seção 3.3 que, em alguns outros casos, a análise puramente geométrica pode significar um caminho muito menos trabalhoso.

Para ilustrar que nem sempre a solução analítica é mais eficiente, vejamos o seguinte exemplo:

Exemplo 3.3.a Sobre uma reta r são traçados A, B e C, nesta ordem. Os comprimentos de AB e BC valem 5 e 2, respectivamente. Considere uma circunferência variável tangente a r em C. As tangentes a esta circunferência traçadas por A e B cortam-se em P. Determine o lugar geométrico de P à medida que a circunferência varia de tamanho.

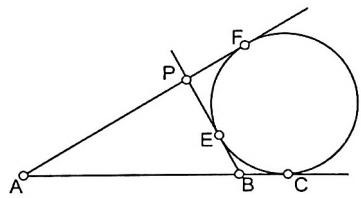


Figura 3.3.1

Solução:

Das propriedades que vimos no capítulo 2 a respeito de potência de um ponto com relação a uma circunferência, sabemos que os segmentos definidos pelas tangentes traçadas de um ponto externo a uma circunferência são iguais.

Segue que:

$$\overline{AF} \quad \overline{AC}$$
$$\overline{PF} \quad \overline{PE}$$
$$\overline{BE} \quad \overline{BC}$$

Como é dado que $\overline{AB}$ 5 e $\overline{BC} = 2$, temos:

$$7 = \overline{AF} = \overline{AP} + \overline{PF} = \overline{AP} + \overline{PE} \quad \therefore \quad \overline{PA} + \overline{PE} = 7 \quad \text{(Eq. I)}$$

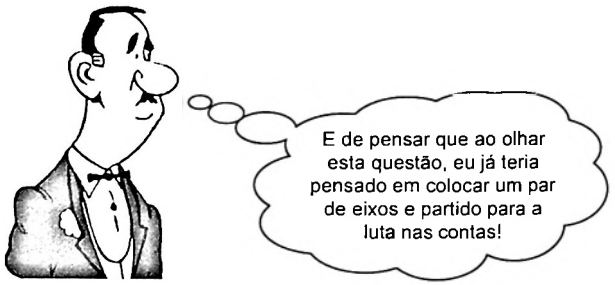
Ainda: $\overline{PB} = \overline{BE} + \overline{PE} = \overline{BC} + \overline{PE} = 2 + \overline{PE} \quad \therefore \quad \overline{PB} - \overline{PE} = 2 \quad \text{(Eq. II)}$

Somando (I) e (II) teremos:

$$\overline{PA} + \overline{PB} = 9$$

Em outras palavras, o ponto variável P é tal que a soma das suas distâncias à dois pontos fixos é constante. Relembrando a definição de elipse (definição 3.2.1), temos que o lugar geométrico de P é:

P percorre uma **elipse** de focos A e B e eixo maior igual a 9.



OBS.: Neste caso, a solução geométrica é, de fato, muito mais simples. Não vamos nos iludir achando que a solução por geometria plana sempre será mais fácil. O objetivo desta seção é de apenas dar ainda mais ferramentas para que o aluno possa escolher qual caminho usar na hora de resolver as questões.

Construção Geométrica da Elipse

Como aprendemos no colégio, sabemos que é possível desenhar uma circunferência apenas com o uso de um compasso. A definição e as propriedades vistas na seção anterior deste capítulo 3 nos permitem pensar em métodos de construção também para o caso de uma elipse.

Construção 1

Suponhamos que são dados 2 pontos no plano A e B e um comprimento de 2.a unidades. Desejamos traçar a elipse de focos A e B e eixo maior igual ao comprimento dado. Sabemos que todo ponto P da elipse será tal que:

$$\overline{PA} + \overline{PB} = 2a$$

Considere, então, um barbante de comprimento igual a 2.a preso em suas extremidades nos pontos A e B.

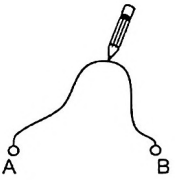


Figura 3.3.2

Esticando este barbante com um lápis, o ponto X aonde aponta a ponta do lápis será tal que:

$$\overline{XA} + \overline{XB} = \text{comprimento do fio} = 2a$$

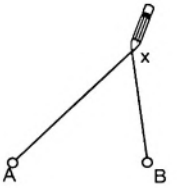


Figura 3.3.3

Como todo ponto X traçado pelo lápis segue a definição da elipse, se movimentarmos o lápis de tal forma que ele faça uma volta completa sempre esticando o barbante, o traço resultante será uma elipse de focos A e B e eixo maior 2a.

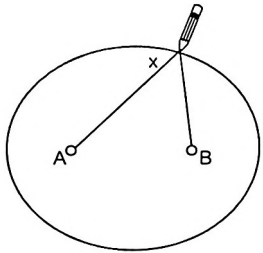


Figura 3.3.4

Construção 2

Suponhamos que conhecemos os valores desejados do comprimento do semi-eixo maior a, e do semi-eixo menor b. Desejamos traçar tal elipse.

Sabemos que a equação de uma elipse centrada na origem de um sistema de eixos coordenados e seus eixos coincidindo com os coordenados é:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Para que a equação seja satisfeita, devemos ter:

$$0 \leq \frac{x^2}{a^2} \leq 1 \text{ e } 0 \leq \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

Ou ainda:

$$-a \leq x \leq a \quad e \quad -b \leq y \leq b$$

Note que para cada valor de (x,y) pertencente à elipse, existirá um valor de t real, entre 0 e $2.\pi$, tal que:

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos t \\ y = b \cdot \operatorname{sen} t \end{cases}$$

Esta representação da elipse em função de um parâmetro t é chamada de **Equação Paramétrica da Elipse.** A equação paramétrica nos dá uma ideia de construção geométrica. Vejamos.

Tracemos, a partir do centro do sistema de coordenadas, uma circunferência de raio a , e outra de raio b.

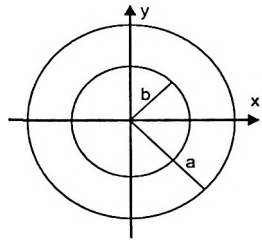


Figura 3.3.5

A partir do centro, tracemos uma semirreta que cortará as circunferências nos pontos M e N e fará um ângulo θ com o eixo x.

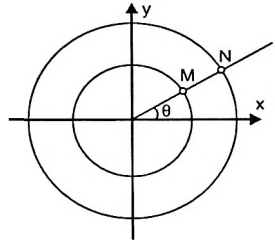


Figura 3.3.6

Passando por M, vamos traçar uma reta paralela ao eixo x, e passando por N uma reta paralela ao eixo y. Seja P o ponto de encontro destas duas retas.

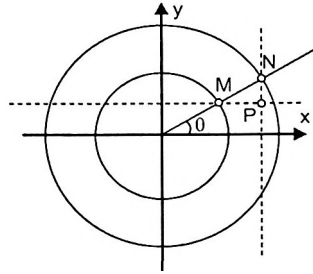


Figura 3.3.7

Observe que o ponto P terá coordenadas (a.cosθ, b.senθ). Logo P está na elipse que desejamos traçar!

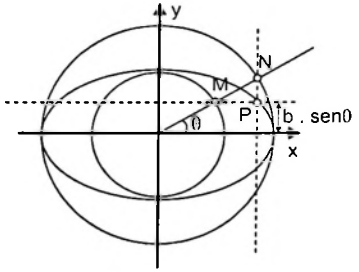


Figura 3.3.8

Quanto mais vezes repetirmos o processo, para diversos valores de θ, nos aproximaremos mais do traço da elipse. Curiosamente, as duas circunferências auxiliadoras nessa construção aparecerão mais vezes de agora em diante. Vamos portanto dar nomes a elas.

Circunferências Principais

Considere a elipse de respectivos semi-eixos maior e menor **a** e **b**. A circunferência centrada na origem e com raio **a** é chamada de **circunferência principal maior** da elipse.

A circunferência centrada na origem e com raio **b** é chamada de **circunferência principal menor** da elipse.

Definição 3.3.1

Além destas duas, outra circunferência será utilizada nos resultados que veremos a seguir.

Circunferência Diretora

Considere a elipse de respectivo semi-eixo maior **a**. A circunferência centrada em um foco e com raio **2.a** é chamada de **circunferência diretora** da elipse.

Definição 3.3.2

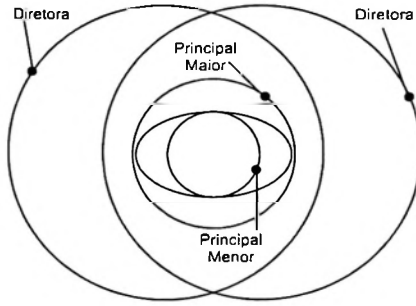


Figura 3.3.9

Construção 3

A terceira maneira, que citaremos por enquanto, de obter uma elipse é um pouco menos prática, mas provavelmente mais fascinante!

Recorte, em uma folha de papel, um círculo de centro C. Desenhe sobre este círculo um ponto fixo P, diferente de C.

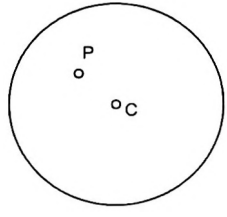


Figura 3.3.10

Dobremos este recorte de modo que as bordas passem por P.

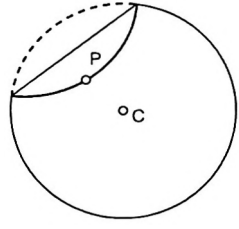


Figura 3.3.11

Façamos isto várias vezes, sempre marcando o segmento criado pela dobra. A figura resultante delimitará uma elipse!

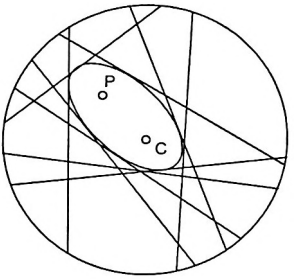


Figura 3.3.12

Embora este resultado seja uma pouco "louco" de fato, a demonstração se baseia num resultado simples, porém não menos fascinante. Vejamos a seguir.

Propriedade Refletora da Elipse

Veremos agora um dos resultados mais fascinantes da elipse.

Seja P um ponto de uma elipse de focos F e F'. A bissetriz externa do triângulo FPF' em P é tangente à elipse.

Resultado 3.3.1 – Teorema das Tangentes

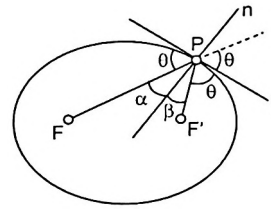


Figura 3.3.13

Demonstração:

Sabe-se que um ponto M pertencerá a elipse de focos F e F' e comprimento de eixo maior $2 \cdot a$, quando

$$\overline{MF} + \overline{MF'} = 2a = \text{constante}$$

Um ponto M, portanto, não pertencerá a esta elipse quando $\overline{MF} + \overline{MF'} \neq 2a$.

Considere agora os pontos P, F e F', bem como a reta t bissetriz externa do triângulo PFF' em P, mencionados no enunciado.

Seja Q o simétrico de F' com relação à reta t. Como t é bissetriz do ângulo F'PQ, temos que será também mediatriz do segmento F'Q.

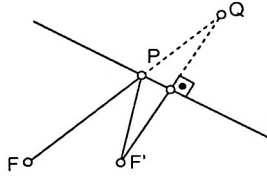


Figura 3.3.14

Portanto: $\overline{PF'} = \overline{PQ}$ (Eq. I)

Além disso: $\overline{FQ} = \overline{FP} + \overline{PQ} = \overline{FP} + \overline{F'P}$ (Eq. II)

Sendo P um ponto da elipse: $\overline{FQ} = \overline{FP} + \overline{F'P} = 2a$ (Eq. III)

Para mostrar que t é tangente à elipse, basta mostrar que P é o único ponto de t que pertence a elipse. Tomemos outro ponto, P', pertencente a t. Vamos mostrar que P' não pode pertencer à elipse.

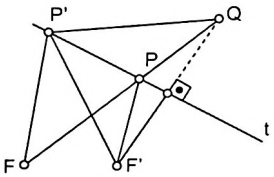


Figura 3.3.15

Como já exposto, t é mediatriz do segmento F'Q. Logo:

$$\overline{P'F'} = \overline{P'Q} \qquad \text{(Eq. IV)}$$

Do triângulo FP'Q, usando a desigualdade triangular:

$$\overline{P'F} + \overline{P'Q} > \overline{FQ}$$

Ou ainda:

$$\overline{P'F} + \overline{P'Q} > \overline{FP} + \overline{PQ}$$

Juntando as equações (I) e (IV) ao resultado acima:

$$\overline{P'F} + \overline{P'F'} > \overline{PF} + \overline{PF'} = 2a$$

Logo, $\overline{P'F} + \overline{P'F'} \neq 2a$ e portanto P' não está na elipse. Com isso, t é tangente à elipse. □

Exemplo 3.3.b Mostre que o simétrico de um foco com relação a uma tangente está na circunferência diretora relativa ao outro foco.

Solução: Considere o desenvolvimento da demonstração do Resultado 3.3.1

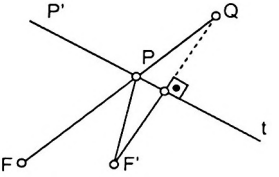


Figura I

Da equação (III) do desenvolvimento, temos que, sendo Q o simétrico do foco F' com relação à tangente t da elipse, temos:

$$\overline{FQ} = 2a$$

Logo, Q está na circunferência diretora relativa ao foco F.

O simétrico de um foco com relação a uma tangente está na circunferência diretora relativa ao outro foco.

Resultado 3.3.2

A 3ª construção geométrica de uma elipse que vimos é uma consequência do resultado do exemplo anterior. Seja o segmento AB uma das dobras feitas no procedimento. Da dobra, temos que o ponto simétrico de P com relação a AB estará sobre a circunferência (ponto Q).

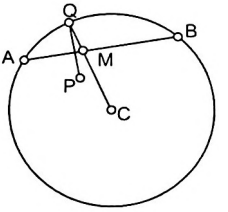


Figura 3.3.16

Se considerarmos a circunferência do recorte como sendo a circunferência diretora relativa a C, teremos que (pelo resultado 3.3.2) AB é tangente a uma elipse de focos P e C, e comprimento do eixo maior QC.

Teorema de La Hire para Elipses

A projeção de um foco de uma elipse sobre uma tangente está na circunferência principal maior da elipse.

Resultado 3.3.3

Demonstração: Seja O o centro da elipse e R a projeção de F' sobre a tangente t.

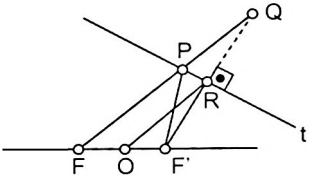


Figura 3.3.17

Como $\overline{F'R} = \overline{RQ}$ e $\overline{F'O} = \overline{FO}$, o segmento OR é base média do triângulo FF'Q. Com isso, OR é paralelo a FQ.

Observe que os triângulos FQF' e ORF' serão, portanto, semelhantes.

Logo:

$$\frac{\overline{OR}}{\overline{FQ}} = \frac{\overline{OF'}}{\overline{FF'}} = \frac{1}{2}$$

E, portanto:

$$\overline{OR} = \frac{\overline{FQ}}{2} = \frac{2a}{2} = a$$

A distância de R ao ponto fixo O é constante e vale a. Ou seja, R estará sempre na circunferência principal maior da elipse.

Exemplo 3.3.c Seja P um ponto de uma elipse de focos F e F'. Mostre que a normal à elipse em P é bissetriz interna do ângulo FPF'.

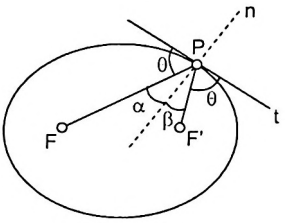


Figura 3.3.18

Solução:

A reta normal à elipse em P é perpendicular à tangente à elipse em P. Portanto:

$$\begin{cases} 90° = \theta + \alpha \\ 90° = \theta + \beta \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta$$

Logo a normal à elipse em P é bissetriz interna do ângulo FPF'.

Exemplo 3.3.d Considere uma elipse de focos F e F', e seja t uma reta tangente qualquer a essa elipse. Considere P e P' como a projeção de F e F' sobre a reta t. Use o Teorema de La Hire para mostrar que para qualquer que seja a tangente t, o produto $\overline{PF} \cdot \overline{P'F'}$ é constante.

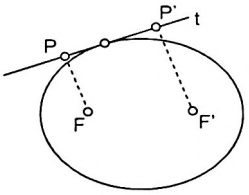


Figura 3.3.19

Solução:

Usando o Teorema de La Hire, temos que P e P' estão sobre a circunferência principal maior da elipse.

Vamos tomar a reta r, paralela a t, também tangente à elipse. Seja Q a projeção de F sobre r.

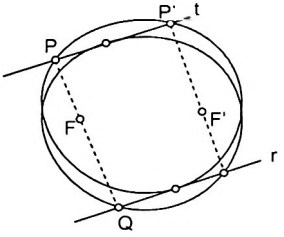


Figura 3.3.20

Da simetria, temos que: $\overline{QF} = \overline{P'F'}$, o que sugere que basta provarmos que o produto $\overline{QF} \cdot \overline{PF}$ é constante.

Ora, mas o segmento que une P e Q é uma corda da circunferência principal (que é fixa, dada a elipse). Pelo resultado 2.2.6, devido à potência do ponto F em relação à circunferência, sabemos que o produto $\overline{QF} \cdot \overline{PF}$ é constante.

OBS.: Vamos parar um pouco para refletir sobre o que acabamos de ver com estes últimos resultados.

Considere um ponto qualquer P sobre a elipse, e os raios vetores relativos a este ponto. Dos resultados que obtivemos anteriormente, sendo n e t as retas normais e tangentes à elipse neste ponto P, temos a seguinte figura.

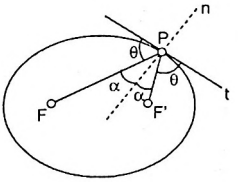


Figura 3.3.21

O raio vetor $\overline{FP}$ reflete-se na elipse (na tangente no ponto) e segue diretamente em direção ao outro foco F', respeitando a Lei da Óptica de que o ângulo de incidência (ângulo que o raio vetor faz com a normal em P) é igual ao ângulo de reflexão (ângulo que o raio vetor refletido faz com a normal em P). Esta propriedade é chamada de **propriedade refletora da elipse.**

A propriedade refletora da elipse não poderia ficar sem aplicações reais. Este resultado foi aplicado, por exemplo, na Arquitetura Acústica de alguns interessantes prédios espalhados pelo mundo.

Na St. Paul's Cathedral, localizada em Londres na Inglaterra, ou no prédio do Capitolio em Washington D.C. nos E.U.A, encontra-se salas chamadas de Galerias do Sussurro (whispering galleries). A idéia consiste em projetar a sala com paredes e tetos formando uma elipse de revolução. A onda sonora partindo de um foco deve, então, refletir em direção ao outro foco. Desta forma, uma pessoa, de pé em um dos focos, se comunica perfeitamente com uma pessoa em outro foco, mesmos sussurrando de costas, por exemplo.

Outro exemplo, digamos mais útil, é a aplicação em espelhos elípticos, usados por cirurgiões e dentistas. Colocando a luz em um dos focos do espelho, o reflexo da mesma se concentra em um ponto desejado, para não incomodar o paciente. Legal, né?

Teorema de Poncelet para Elipses

Encerraremos o capitulo com o teorema de Poncelet. Este teorema é particularmente interessante pois possui versões análogas para os outros dois tipos de cônicas que estudaremos: as hipérboles e as parábolas.

O engenheiro e matemático Jean-Victor Poncelet descobriu a seguinte propriedade das seções cônicas ao desenvolver o seu teorema conhecido como "Porisma de Poncelet", na área de Geometria Projetiva.

Teorema de Poncelet para Elipses

Seja P um ponto externo a uma elipse, a partir do qual traça-se as tangentes r e t, como na figura abaixo. Na figura, vale que:

$$\alpha = \alpha'$$
$$\beta = \beta'$$

Resultado 3.3.4

Jean-Victor Poncelet
(1788-1867)

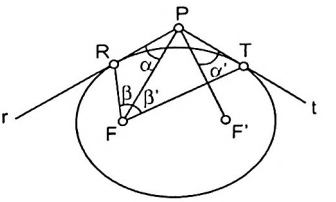


Figura 3.3.22

Demonstração:

Considere os pontos M e M' como sendo os simétricos de F e F' com relação à r e t, respectivamente. Lembremos o resultado 3.3.1 nesta construção.

A partir desta construção teremos:

$$\overline{PF} = \overline{PM} \quad , \quad \overline{PF'} = \overline{PM'}$$

Do resultado 3.3.2: $\overline{MF'} = \overline{M'F} = 2a$

Seja φ o ângulo entre PF e PF'.

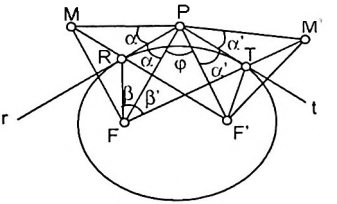


Figura 3.3.23

Notaremos que os triângulos PMF' e PM'F são congruentes (pelo caso LLL).

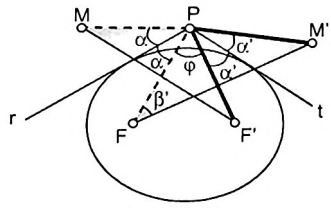


Figura 3.3.24

Logo: $\alpha = \alpha'$

Isto conclui a primeira parte do teorema. Ainda da congruência, temos que o ângulo assinalado como θ a seguir é igual a β'.

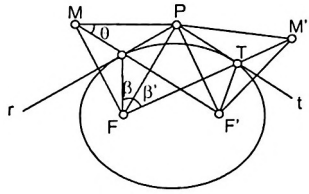


Figura 3.3.25

Já da simetria da construção de M, temos que $\theta = \beta$. E com isso, $\beta = \beta'$. □

Exemplo 3.3.e Resolva novamente o Exemplo 3.2.k, usando o Teorema de Poncelet.

Solução:

Na figura abaixo, seja M o simétrico de F com relação à reta r. Da construção temos que os ângulos $M\hat{P}R$ e $F\hat{P}R$ são iguais. Do teorema de Poncelet, estes ângulos são também iguais ao ângulo $F'\hat{P}T$.

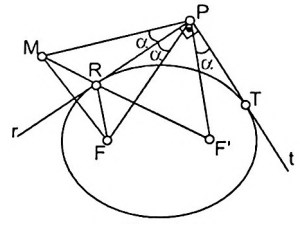


Figura I

Do esquema acima, temos: $F\hat{P}F' = 90° - 2\alpha$

E, com isso: $M\hat{P}F' = (90° - 2\alpha) + 2\alpha = 90°$

Logo o triângulo MPF' é retângulo. Lembrando que, do resultado 3.3.2), o segmento MF' vale 2a, poderemos escrever que:

$$\overline{PM}^2 + \overline{PF'}^2 = (2a)^2$$

Mas, além disso, da simetria da construção temos $\overline{PF} = \overline{PM}$ e, portanto:

$$\overline{PF}^2 + \overline{PF'}^2 = (2a)^2$$

Considerando o sistema de eixos canônicos, a equação obtida acima ser reescrita:

$$(x+c)^2 + y^2 + (x-c)^2 + y^2 = 4a^2 \Rightarrow 2x^2 + 2c^2 + 2y^2 = 2a^2 + 2a^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = a^2 + \left(a^2 - c^2\right) = a^2 + b^2$$

Logo o lugar geométrico de P será uma circunferência de centro coincidindo com o da elipse, e raio igual a $\sqrt{a^2+b^2}$.

Curiosidade: Área da Elipse

Considere a elipse dada a seguir.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

A área da elipse é dada por:

$$A_{elipse} = \pi \cdot a \cdot b$$

Demonstração:

Demonstraremos a seguir o resultado acima, mesmo que precisemos utilizar Cálculo Integral. A Escola Naval costuma cobrar noções de Integrais Imediatas como a que desenvolveremos a seguir. Para melhor referência do assunto, consulte um livro de Cálculo Integral.

Da equação da elipse podemos explicitar y como função de x:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y = \pm b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

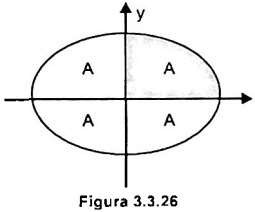


Figura 3.3.26

Da figura acima e da simetria da elipse, notamos que a área da elipse pode ser dividida em quatro partes iguais.

$$A_{elipse} = 4 \cdot A = 4 \cdot \int_0^a b \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \cdot dx$$

Para resolver esta integral imediata, façamos a seguinte transformação de variáveis:

$$x = a \cdot \text{sen}\theta$$

Como $0 < x < a$, deveremos ter: $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Além disso:

$$dx = a \cdot \cos\theta \cdot d\theta$$

Voltando à integral:

$$A_{elipse} = 4 \cdot \int_0^{\pi/2} b \cdot \sqrt{1 - \text{sen}^2\theta} \cdot (a \cdot \cos\theta \cdot d\theta) = 4a \cdot b \int_0^{\pi/2} \cos\theta \cdot |\cos\theta| \cdot d\theta$$

No intervalo de integração de 0 a $\pi/2$, temos que $\cos\theta > 0$, e, portanto:

$$A_{elipse} = 4a \cdot b \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \cdot d\theta = 4a \cdot b \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\cos(2\theta) + 1}{2} \right) \cdot d\theta$$

$$= 4a \cdot b \cdot \left(\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(2\theta)}{2} \cdot d\theta + \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \cdot d\theta \right) = 4a \cdot b \cdot \left(\frac{\text{sen}(2\theta)}{4} \Big|_0^{\pi/2} + \frac{\theta}{2} \Big|_0^{\pi/2} \right)$$

$$= 4a \cdot b \cdot \left(\frac{\text{sen}\pi}{4} - \frac{\text{sen}0}{4} + \frac{\pi/2}{2} - \frac{0}{2} \right) = \pi \cdot a \cdot b \ \square$$

OBS.: O resultado acima está coerente com a noção de "degeneração de uma elipse em uma circunferência". Quando a distância focal tende a zero, a distância a se aproxima de b. De modo que a área da circunferência é obtida quando fazemos a = b = R na expressão da área da elipse.

Já o comprimento da elipse não é tão simples encontrar. A fórmula integral que calcula tal comprimento não pode ser expressa em termos de funções elementares. O problema de encontrar uma expressão "aproximada" para o comprimento da elipse já foi estudado por muitos matemáticos, e algumas destas soluções podem ser encontradas na literatura. Não as apresentaremos aqui por não terem utilidade para o nosso foco de estudo!

3.4. Hipérboles

Vamos conhecer um pouco mais da segunda das três seções cônicas que estudamos. Novamente, relembremos o resultado do 1º Teorema de Dandelin-Quetelet, e tomemos o mesmo como definição de Hipérbole.

Dados dois pontos no plano F e F', não coincidentes, o lugar geométrico dos pontos P tais que o módulo da diferença das distâncias PF e PF' é constante é uma hipérbole.

$$\left|\overline{PF} - \overline{PF'}\right| = \text{constante} = 2a$$

Chamaremos, por conveniência futura, esta constante de 2a.

Definição 3.4.1

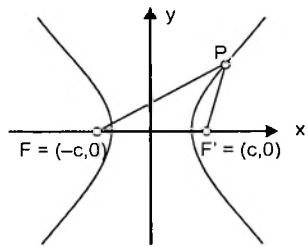


Figura 3.4.1

A condição da existência da hipérbole é que exista o triângulo PFF'. Ou seja, da condição de existência do triângulo:

$$\boxed{\overline{FF'} > 2a}$$

Condição de Existência da Hipérbole

Vamos representar a equação do lugar geométrico dos pontos P = (x, y) pertencentes à hipérbole de focos F e F'. Para isto, utilizaremos um par de eixos com um dos eixos coordenados coincidindo com a reta suporte de FF' e o outro coincidindo com a reta mediatriz deste mesmo segmento, como ilustrado na figura 3.4.1.

Da definição temos que: $\overline{PF} = \overline{PF'} \pm 2a$

Ou ainda: $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a$

Elevando ao quadrado:

$$\Rightarrow \quad (x+c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\cdot\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$\Rightarrow \quad \cancel{x^2} + 2x\cdot c + \cancel{c^2 + y^2} = 4a^2 \pm 4a\cdot\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \cancel{x^2} - 2x\cdot c + \cancel{c^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow \quad 4x\cdot c - 4a^2 = \pm 4a\cdot\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow \quad x\cdot\frac{c}{a} - a = \pm\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Elevando novamente ao quadrado:

$$\Rightarrow \quad x^2 \cdot \frac{c^2}{a^2} - 2x \cdot c + a^2 = x^2 - 2x \cdot c + c^2 + y^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2 \cdot \left(\frac{c^2 - a^2}{a^2} \right) - y^2 = c^2 - a^2$$

Da condição de existência da hipérbole temos que $c > a$, e, portanto $c^2 - a^2 > 0$. Chamaremos esta constante convenientemente de b^2.

$$\Rightarrow \quad x^2 \cdot \left(\frac{b^2}{a^2} \right) - y^2 = b^2$$

Dividindo dos dois lados por b^2.

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Resultado 3.4.1 Forma Canônica da Equação da Hipérbole com Focos sobre Ox

Se os eixos coordenados forem escolhidos tais que F e F' estejam nos eixos das ordenadas e a mediatriz do segmento FF' esteja sobre o eixo das abscissas, a equação se torna:

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1}$$

Resultado 3.4.2 Forma Canônica da Equação da Hipérbole com focos sobre Oy

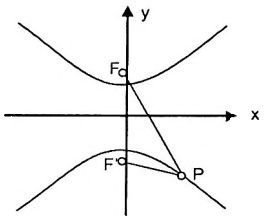


Figura 3.4.2 Hipérbole com focos sobre eixo Oy.

A partir da equação da Hipérbole na forma canônica, algumas conclusões podem ser citadas:

(1) A hipérbole não é uma figura geométrica fechada. Trata-se de uma curva com dois "ramos" disjuntos.

(2) Para todo ponto da hipérbole, o ponto simétrico com relação à origem também pertence à hipérbole. A origem, neste caso, é chamada de **centro da hipérbole.**

(3) A aparência da equação da hipérbole está diretamente ligada ao sistema de eixos escolhido.

(4) No caso elipse a definição da constante b obrigava que a > b. No caso da hipérbole, a única restrição é que c seja maior que a. O parâmetro a pode ser maior ou menor que b.

(5) Da definição do lugar geométrico hipérbole, e referindo à figura 3.4.1, nota-se que $\overline{PF} - \overline{PF'} = 2 \cdot a$ define o ramo do lado direito da hipérbole (pois para estes pontos temos $\overline{PF} > \overline{PF'}$). Da mesma forma, $\overline{PF'} > \overline{PF}$ define o ramo do lado esquerdo (pois para estes pontos temos $\overline{PF'} > \overline{PF}$).

Ainda observando sua equação, determinamos os pontos de interseção da curva da hipérbole com os eixos coordenados.

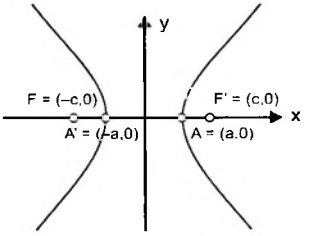


Figura 3.4.3

Como a curva da hipérbole atravessa o eixo que contém os focos, este eixo é comumente chamado de eixo transverso. O outro eixo, portanto, recebe o nome de eixo não transverso. Os seguintes termos são geralmente usados para referir-se a hipérboles.

$\overline{AA'} = 2a$: eixo real (transverso) da hipérbole (a é o semieixo)

$\overline{BB'} = 2b$: eixo imaginário (não transverso) da hipérbole (b é o semieixo)

$\overline{CC'} = 2c$: distância focal da hipérbole (c é a semidistância focal)

Definição 3.4.2

Da definição de b^2 usada na demonstração da equação da hipérbole podemos escrever:

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

Resultado 3.4.3 Relação Fundamental da Hipérbole

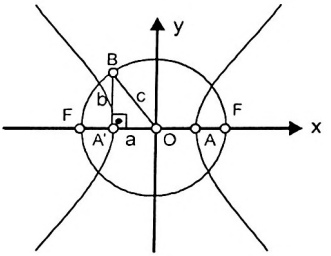


Figura 3.4.4 – Triângulo Característico da Hipérbole

OBS.: Cuidado para não confundir a relação fundamental da hipérbole com a da elipse (no caso da elipse $a^2 = b^2 + c^2$)

Quando a = b, dizemos que a hipérbole é **equilátera.**

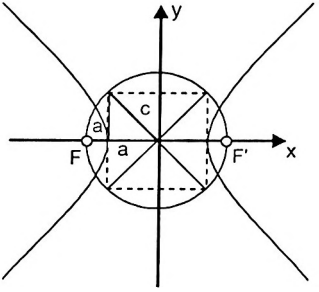


Figura 3.4.5 – Hipérbole Equilátera

Exemplo 3.4.a Determine a equação da hipérbole de centro (x_1, y_1) diferente da origem tais que seus eixos principais sejam paralelos aos eixos coordenados Ox e Oy, e o eixo contendo os focos seja paralelo a Ox

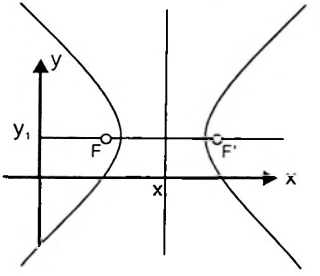


Figura 3.4.6

Solução:

Assim como foi feito no exemplo 3.2.b para elipses vamos partir da definição da hipérbole. Sendo P = (x, y) um ponto genérico da hipérbole, temos:

$$\overline{PF} = \overline{PF'} \pm 2a$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x - x_1 + c)^2 + (y - y_1)^2} = \sqrt{(x - x_1 - c)^2 + (y - y_1)^2} \pm 2a$$

Procedendo de maneira rigorosamente igual ao que foi feito na dedução do resultado 3.4.1 (elevando ao quadrado e arrumando), chegaremos a:

$$\Rightarrow \frac{(x-x_1)^2}{a^2} - \frac{(y-y_1)^2}{b^2} = 1$$

OBS.: Novamente, se pensarmos na mudança de variáveis:

$$\begin{cases} x' = x - x_1 \\ y' = y - y_1 \end{cases}$$

O novo sistema de eixos X'OY' transforma a equação da hipérbole deslocada (ou transladada) na sua forma canônica.

$$\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} = 1$$

Exemplo 3.4.b (ITA 2003) Considere a família de circunferências com centros no segundo quadrante e tangentes ao eixo Oy. Cada uma destas circunferências corta o eixo Ox em dois pontos, distantes entre si de 4 unidades de comprimento. Determine o lugar geométrico dos centros destas circunferências.

Solução: A partir do enunciado podemos fazer a seguinte ilustração:

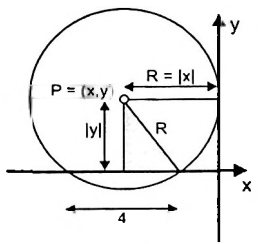


Figura I

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo hachurado:

$$R^2 = |x|^2 = 2^2 + |y|^2$$

Ou ainda:

$$\boxed{x^2 - y^2 = 4}$$

Os centros das circunferências descritas no enunciado descrevem uma **hipérbole equilátera**.

Exemplo 3.4.c Identifique a curva descrita pela seguinte equação:

$$x^2 - 6x - 2y^2 - 4y + 3 = 0$$

Solução:

Completando quadrados:

$$x^2 - 6x + \underline{9} - 2\left(y^2 + 2y + \underline{1}\right) + 3 = \underline{9} - \underline{2 \cdot 1}$$

$$\Rightarrow (x-3)^2 - 2(y+1)^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad \frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{2} = 1$$

A curva é, portanto, uma hipérbole de centro em (3,–1), focos sobre um eixo paralelo ao eixo Ox e distância focal $2 \cdot \sqrt{6}$.

Exemplo 3.4.d Identifique a curva descrita pela equação:

$$x^2 - 6x - 2y^2 - 4y + 7 = 0$$

Solução:

Procedendo como no exemplo anterior, completando quadrados, chega-se a:

$$(x-3)^2 - 2 \cdot (y+1)^2 = 0$$

A equação acima pode ainda ser fatorada:

$$\left((x-3) - \sqrt{2} \cdot (y+1)\right) \cdot \left((x-3) + \sqrt{2} \cdot (y+1)\right) = 0$$

Ou ainda:

$$\begin{cases} (x-3) - \sqrt{2} \cdot (y+1) = 0 \\ (x-3) + \sqrt{2} \cdot (y+1) = 0 \end{cases}$$

A curva descrita, que à primeira vista parecia representar uma hipérbole, representa duas retas concorrentes. Portanto, **cuidado!** Veremos mais sobre estas degenerações no capítulo 4.

Excentricidade da Hipérbole

A partir da definição da excentricidade de uma seção cônica qualquer, deduz-se o seguinte resultado:

Considere a hipérbole de semieixo real a e semidistância focal c. A excentricidade da hipérbole pode ser expressa como:

$$e = \frac{c}{a} > 1$$

Resultado 3.4.4

Da condição de existência da hipérbole vê-se imediatamente que c/a é uma constante maior que 1. A demonstração de que esta constante é exatamente a mesma excentricidade já definida (definição 3.1.1) é exatamente análoga ao que foi feito para elipse. Deixamos, portanto, como **exercício** ao leitor. O seguinte resultado segue direto desta demonstração.

A distância entre um foco e sua diretriz mais próxima é chamada de **parâmetro focal da hipérbole**, ou simplesmente, **parâmetro da hipérbole (p)**. Esta distância vale:

$$p = \frac{b^2}{c}$$

Resultado 3.4.5

A excentricidade da hipérbole também terá influência sobre sua "aparência". Se a constante 2a se mantiver constante, e aumentarmos a distância focal, a hipérbole se aproxima de duas retas paralelas.

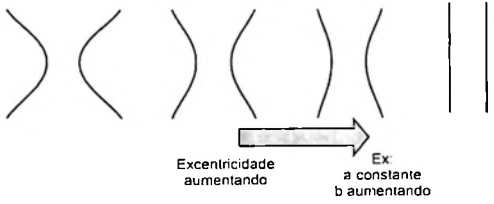


Figura 3.4.7

Equação das Reta Diretrizes

Considere um sistema de coordenadas tal que a equação da hipérbole esteja na forma canônica:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

A equação das retas diretrizes (associadas a cada foco), neste caso serão:

$$\text{diretrizes}: \; x = \pm\frac{a^2}{c}$$

Resultado 3.4.6

A demonstração do resultado acima é rigorosamente análoga ao que foi feito para elipses. Novamente a dedução vem do desenvolvimento da demonstração do resultado anterior (resultado 3.4.4).

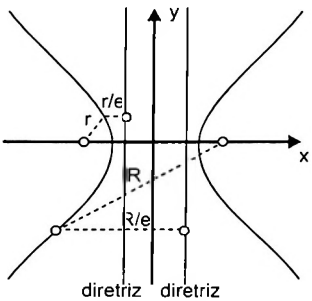


Figura 3.4.8

OBS.: Como a excentricidade de uma hipérbole é sempre um número maior que 1, a distância de um ponto P qualquer da hipérbole ao foco será maior que sua distância à diretriz correspondente.

Exemplo 3.4.e (IME 2009) Considere as hipérboles que passam pelos pontos (–4,2) e (–1,–1) e apresentam diretriz na reta y = –4. Determine a equação do lugar geométrico formado pelos focos dessas hipérboles, associados a esta diretriz, e represente o mesmo no plano cartesiano.

Solução:

Do 2º teorema de Dandelin-Quetelet, podemos escrever:

$$\frac{\overline{PF}}{\overline{Pd}} = e$$

A equação acima pode ser aplicada para dois pontos P da curva dados no enunciado (note que o ponto (–4,2) dista 6 da reta y = –4, e o ponto (–1,–1) dista 3 da mesma reta.

$$\begin{cases} \dfrac{\overline{P_1F}}{\overline{P_1d}} = \dfrac{\overline{P_1F}}{6} = e \\ \dfrac{\overline{P_2F}}{\overline{P_2d}} = \dfrac{\overline{P_2F}}{3} = e \end{cases}$$

Dividindo as duas equações:

$$\frac{\overline{P_1F}}{\overline{P_2F}} = 2$$

Este lugar geométrico acima é conhecido como o **Círculo de Apolônio do segmento P_1P_2 com razão 2.**

A equação deste L.G. vem do desenvolvimento da expressão acima, para F = (x,y) o ponto variável. De onde segue que:

$$\frac{\overline{P_1F}}{\overline{P_2F}} = 2 \Rightarrow \frac{\sqrt{(x+4)^2+(y-2)^2}}{\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}} = 2$$

$$\sqrt{(x+4)^2+(y-2)^2} = 2\cdot\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 3y^2 + 12y = 12$$

$$\boxed{x^2+(y+2)^2 = 8}$$

Condição de Existência das Hipérboles:

Para que a cônica seja hipérbole, é necessário que e > 1. De onde segue que:

$$\begin{cases} \overline{P_1F} > 6 & \Rightarrow (x+1)^2 + (y+1)^2 > 9 \\ \overline{P_2F} > 3 & \Rightarrow (x+4)^2 + (y-2)^2 > 36 \end{cases}$$

Além disso, os pontos pertencentes à diretriz y = –4 devem ser excluídos (o foco não pode estar contido na diretriz).

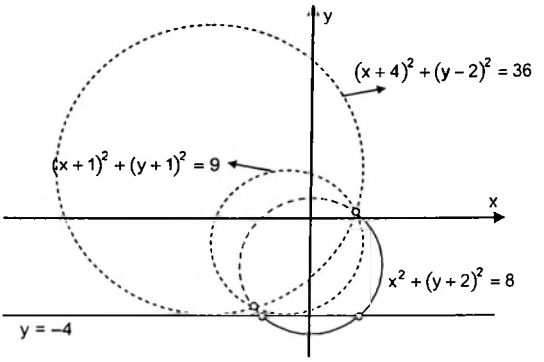


Figura I

Assíntotas da Hipérbole

A distância da hipérbole é uma reta fixa tende a zero, à medida que x tende a $\pm\infty$. A esta reta, damos o nome de **assíntota** da hipérbole.

Devido à simetria de sua curva, toda hipérbole possui **duas** retas assíntotas.

Definição 3.4.3

Consideremos a hipérbole na forma canônica:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Da aparência da curva, notamos que os pontos de cada ramo da hipérbole tendem a infinito a medida que o se distanciam do seu centro. Porém, o fato da coordenada x do ponto da hipérbole crescer indefinidamente (tender a infinito) não corresponde a um crescimento indefinido de sua coordenada y.

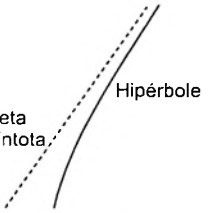


Figura 3.4.9

Quando isto ocorre, dizemos que o crescimento é assintótico. Ou seja, os pontos da hipérbole tendem a alguma reta especifica no plano.

Da equação da hipérbole, temos que: $\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1$

Reparemos que, para valores muito elevados de x, a parcela $x^2/a^2 - 1$ parece-se cada vez mais com apenas x^2/a^2.

Resumindo: $x \to \pm\infty \quad \Rightarrow \quad 1 + \frac{x^2}{a^2} \to \frac{x^2}{a^2}$

Pelo princípio da equivalência, podemos dizer que para valores de x próximos a infinito (ou menos infinito), os pontos da hipérbole tendem à equação:

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} \quad \Rightarrow \quad y = \pm\frac{b}{a} \cdot x$$

As retas $y = \pm\frac{b}{a} \cdot x$ são as chamadas retas assíntotas da hipérbole.

As equações das retas assíntotas à hipérbole de eq. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ são:

$$y = \pm\frac{b}{a} \cdot x$$

Resultado 3.4.7

Note que as assíntotas coincidem com as hipotenusas dos triângulos característicos da hipérbole (figura 3.4.4).

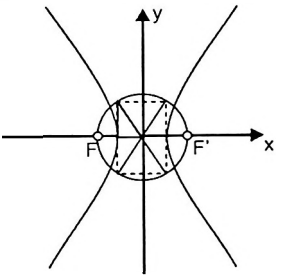


Figura 3.4.10

OBS.: As assíntotas de uma hipérbole equilátera serão perpendiculares entre si.

Exemplo 3.4.f Determine as equações das retas assíntotas à hipérbole de equação:

$$9y^2 - 18y - 4x^2 - 16x = 43$$

Solução: Completando quadrados, descobre-se que a equação acima equivale à expressão:

$$\frac{(y-1)^2}{4} - \frac{(x+2)^2}{9} = 1$$

Note que quando x tende a valores muito altos, teremos:

$$\frac{(x+2)^2}{9} + 1 \approx \frac{(x+2)^2}{9}$$

Logo, a equação das assíntotas virão de:

$$\frac{(y-1)^2}{4} = \frac{(x+2)^2}{9} \quad \Rightarrow \quad y = 1 \pm \frac{2}{3}\cdot(x+2)$$

Exemplo 3.4.g Calcule a distância do foco de uma hipérbole a uma de suas assíntotas.

Solução:

Considerando a hipérbole em sua forma canônica: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Sabemos que as assíntotas têm equações: $y = \pm\frac{b}{a}\cdot x$

Um dos focos da hipérbole terá coordenadas F = (c, 0). A distância deste ponto a cada uma das assíntotas será:

$$d = \frac{\left|0 \pm \frac{b}{a}\cdot c\right|}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}} = \frac{\left|\frac{b}{a}\cdot c\right|}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}} = \frac{\left|\frac{b}{a}\cdot c\right|}{\sqrt{\frac{c^2}{a^2}}} = \frac{\left|\frac{b}{a}\cdot c\right|}{\left|\frac{c}{a}\right|} = |b| = b$$

$$\boxed{d(\text{Foco, Assintota}) = b}$$

Raio Vetor da Hipérbole

Dada uma hipérbole e um ponto P pertencente à mesma, o vetor que liga um foco a P é chamado de **raio vetor** (também chamado de **raio focal**) da hipérbole relativo ao ponto P.

Para cada ponto pertencente à hipérbole, há exatamente 2 raios vetores.

Definição 3.4.4

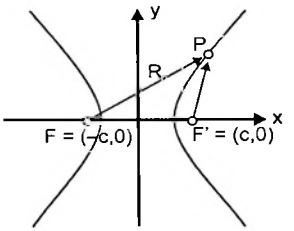


Figura 3.4.11

É possível calcular uma expressão simplificada do comprimento dos raios vetores de uma hipérbole relativos a um ponto P. Vejamos a seguir:

Comprimento dos Raios Vetores:

Considere a hipérbole dada na figura 3.4.11, com excentricidade e, e o ponto $P = (x_0, y_0)$.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Os comprimentos dos raios vetores relativos a P são:

$$\begin{cases} R = \overline{PF} = e \cdot x_0 + a \\ r = \overline{PF'} = e \cdot x_0 - a \end{cases} \qquad \begin{cases} R = \overline{PF} = -e \cdot x_0 - a \\ r = \overline{PF'} = -e \cdot x_0 + a \end{cases}$$

(se P está no ramo direito) (se P está no ramo esquerdo)

Resultado 3.4.8

Demonstração:

Para o ramo direito:

$$\overline{PF} = \overline{PF'} + 2a \Rightarrow R^2 = (r + 2a)^2$$

$$\Rightarrow R^2 = r^2 + 4a \cdot r + 4a^2$$

$$\Rightarrow \left((x_0 + c)^2 + y_0^2\right) = \left((x_0 - c)^2 + y_0^2\right) + 4a \cdot r + 4a^2$$

$$\Rightarrow 2x_0 \cdot c + \cancel{x_0^2 + c^2 + y_0^2} = 4a^2 + 4a \cdot r - 2x_0 \cdot c + \cancel{x_0^2 + c^2 + y_0^2}$$

$$\Rightarrow 4a \cdot r = 4x_0 \cdot c - 4a^2 \Rightarrow r = \left(\frac{c}{a}\right) \cdot x_0 - a = e \cdot x_0 - a$$

Como $R - r = 2a$: $R = (e \cdot x_0 - a) + 2a = e \cdot x_0 + a$ □

Para o ramo esquerdo:

$$\overline{PF'} = \overline{PF} + 2a \Rightarrow r^2 = (R + 2a)^2$$

$$\Rightarrow r^2 = R^2 + 4a \cdot R + 4a^2$$

$$\Rightarrow \left((x_o - c)^2 + y_o^2\right) = \left((x_o + c)^2 + y_o^2\right) + 4a \cdot R + 4a^2$$

$$\Rightarrow 4a \cdot R = -4x_o \cdot c - 4a^2 \Rightarrow R = -\left(\frac{c}{a}\right) \cdot x_o - a = -e \cdot x_o - a$$

Como $r - R = 2a$: $r = (-e \cdot x_o - a) + 2a = -e \cdot x_o + a$ □

Forma Polar do Raio Vetor:

Considere o raio vetor relativo a um foco F e a um ponto P da hipérbole. Seja θ o ângulo que o raio vetor faz com o eixo que contém o foco F. O comprimento deste raio vetor será dado por:

$$r = \frac{p \cdot e}{1 - e \cdot \cos\theta}$$

Resultado 3.4.9

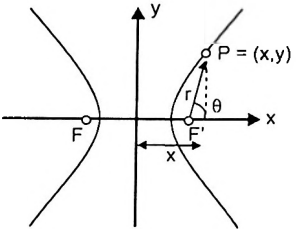


Figura 3.4.12

Demonstração:

Da figura, temos: $x = c + r \cdot \cos\theta$

Do resultado 3.4.6: $r = e \cdot x - a \Rightarrow x = \frac{r + a}{e}$

Com isso:

$$\left(\frac{r + a}{e}\right) = c + r \cdot \cos\theta$$

$$\Rightarrow r \cdot \left(\frac{1}{e} - \cos\theta\right) = c - \frac{a^2}{c} = \underbrace{\frac{b^2}{c}}_{=p} \Rightarrow r = \frac{p \cdot e}{1 - e \cdot \cos\theta}$$

Se prolongarmos o segmento PF até atingir novamente a hipérbole em P', o segmento PP' será uma chamada **corda focal.** De maneira geral, definimos:

Se P e P' são dois pontos da hipérbole tal que o segmento PP' contém um foco F, então PP' é chamado de uma **corda focal** da hipérbole.

Definição 3.4.5

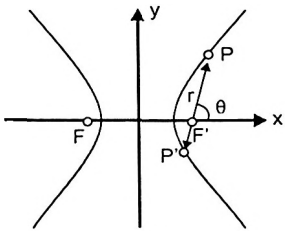


Figura 3.4.13

Forma Polar de uma Corda Focal;

Considere uma corda focal definida pelo segmento PP', com P e P' sobre a hipérbole, passando por um foco. Seja θ o ângulo que a corda faz com o eixo que contém o foco F. O comprimento desta corda PP' será

$$\overline{PP'} = \frac{2p \cdot e}{1 - e^2 \cdot \cos^2 \theta}$$

Resultado 3.4.10

Demonstração:

Do resultado 3.4.9, temos:

$$\begin{cases} r = \dfrac{p \cdot e}{1 - e \cdot \cos\theta} \\ r' = \dfrac{p \cdot e}{1 - e \cdot \cos(\pi + \theta)} = \dfrac{p \cdot e}{1 + e \cdot \cos\theta} \end{cases}$$

Com isso, o comprimento de uma corda focal qualquer será dado por:

$$\overline{PP'} = \frac{p \cdot e}{1 + e \cdot \cos\theta} + \frac{p \cdot e}{1 - e \cdot \cos\theta} = \frac{2p \cdot e}{1 - e^2 \cdot \cos^2 \theta} \quad \square$$

Latus Rectum

A corda focal perpendicular ao eixo que contém os focos da hipérbole de semi-eixos a e b tem comprimento igual a:

$$\lambda = \frac{2b^2}{a}$$

Este comprimento é chamado de **Latus Rectum** da Hipérbole.

Resultado 3.4.11

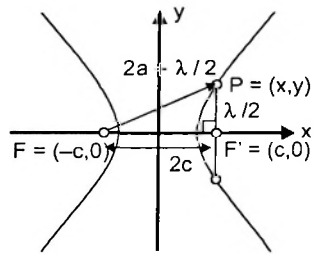


Figura 3.4.14

Demonstração:

Do teorema de Pitágoras no triângulo PFF' da figura acima, tem-se:

$$\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 + (2c)^2 = \left(2a + \frac{\lambda}{2}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{\lambda^2}{4}\right) + 4c^2 = 4a^2 + 2a\cdot\lambda + \left(\frac{\lambda^2}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{2\left(c^2 - a^2\right)}{a} = \frac{2b^2}{a} \quad \square$$

OBS.: Poderíamos ter simplesmente usado o Resultado 3.4.10, fazendo $\theta = 90^\circ$ na expressão de uma corda focal qualquer.

$$\lambda = \overline{PP'} = \frac{2p\cdot e}{1 - e^2\cdot\cos^2\left(90^\circ\right)} = \frac{2\cdot\frac{b^2}{c}\cdot\frac{c}{a}}{1 - e^2\cdot 0} = \frac{2b^2}{a}$$

Como **exercício**, mostre que o Latus Rectum é também a corda focal de comprimento mínimo.

Reta Tangente à Hipérbole

Equação da Reta Tangente à Hipérbole:

Considere a elipse dada a seguir e o ponto $P = (x_0, y_0)$.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

A equação da reta tangente à elipse em P é dada por:

$$\left(\frac{x_0}{a^2}\right) \cdot x - \left(\frac{y_0}{b^2}\right) \cdot y = 1$$

Resultado 3.4.12

Demonstração:

A demonstração é análoga ao que fizemos para elipses. Uma reta qualquer pode ser representada por $y = m \cdot x + h$. Como P pertence à reta, temos:

$$y_0 = m \cdot x_0 + h \quad \Rightarrow \quad h = y_0 - m \cdot x_0$$

Para que a reta seja tangente, a solução do sistema deve ser única.

$$\begin{cases} y = m \cdot (x - x_0) + y_0 \\ b^2 \cdot x^2 - a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow b^2 \cdot x^2 - a^2 \cdot \left(m \cdot (x - x_0) + y_0\right)^2 = a^2 \cdot b^2$$

$$\Rightarrow b^2 \cdot x^2 - a^2 \left(m^2 \cdot (x - x_0)^2 + 2m \cdot (x - x_0) \cdot y_0 + y_0^2\right) = a^2 \cdot b^2$$

$$\Rightarrow x^2 \cdot \left(b^2 - a^2 \cdot m^2\right) - x \cdot \left(2m \cdot a^2 \cdot (y_0 - m \cdot x_0)\right) - a^2 \cdot (y_0 - m \cdot x_0)^2 - a^2 \cdot b^2 = 0$$

A solução desta equação do 2º grau deve ser única! Mas conhecemos esta solução. Trata-se de $x = x_0$. Portanto, de maneira análoga ao que fizemos com elipses, podemos fazer a identidade polinômio do segundo grau acima com o polinômio que tem raiz dupla em $x = x_0$

$$x^2 \cdot \left(b^2 - a^2 \cdot m^2\right) - x \cdot \left(2m \cdot a^2 \cdot (y_0 - m \cdot x_0)\right) - a^2 \cdot (y_0 - m \cdot x_0)^2 - a^2 \cdot b^2$$
$$\equiv \left(b^2 - a^2 \cdot m^2\right) \cdot (x - x_0)^2$$

$$x^2 \cdot \left(b^2 - a^2 \cdot m^2\right) - x \cdot \left(2m \cdot a^2 \cdot (y_0 - m \cdot x_0)\right) - a^2 \cdot (y_0 - m \cdot x_0)^2 - a^2 \cdot b^2$$
$$\equiv x^2 \left(b^2 - a^2 \cdot m^2\right) - x \cdot (2 \cdot x_0)\left(b^2 - a^2 \cdot m^2\right) + \left(b^2 - a^2 \cdot m^2\right) \cdot x_0^2$$

Da identidade:

$$\begin{cases} \left(b^2 - a^2 \cdot m^2\right) \cdot x_o = m \cdot a^2 \cdot y_o - m^2 \cdot a^2 \cdot x_o \\ \left(b^2 - a^2 \cdot m^2\right) \cdot x_o^2 = -a^2 \cdot (y_o - m \cdot x_o)^2 - a^2 \cdot b^2 \end{cases}$$

Desenvolvendo a primeira equação resultante da identidade de Polinômios acima, temos:

$$m = \frac{b^2 \cdot x_0}{a^2 \cdot y_0}$$

Como a reta contém o ponto $P = (x_0, y_0)$:

$$y_o = \left(\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_o}{y_o}\right) \cdot x_o + h \quad \Rightarrow \quad h = y_o - \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_o^2}{y_o} = \frac{b^2}{y_o} \cdot \left(\frac{y_o^2}{b^2} - \frac{x_o^2}{a^2}\right)$$

Como o ponto $P = (x_0, y_0)$ pertence à hipérbole, ele satisfaz sua equação

$$\frac{x_o^2}{a^2} - \frac{y_o^2}{b^2} = 1$$

Usando o resultado acima, na expressão de h:

$$h = \frac{b^2}{y_0} \cdot \underbrace{\left(\frac{y_o^2}{b^2} - \frac{x_o^2}{a^2}\right)}_{=-1} = -\frac{b^2}{y_o}$$

Com isso, temos que a equação da reta tangente é dada por:

$$y = \left(\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_o}{y_o}\right) \cdot x - \frac{b^2}{y_o} \quad \therefore \quad \frac{x \cdot x_o}{a^2} - \frac{y \cdot y_o}{b^2} = 1 \quad \square$$

Para aqueles que já estão familiarizados com Derivadas, fica como **exercício** deduzir a expressão do resultado acima também usando Cálculo diferencial, como fizemos no caso de Elipses.

Exemplo 3.4.h Mostre que as retas $y = m \cdot x \pm \sqrt{a^2 \cdot m^2 - b^2}$ são sempre tangentes à hipérbole dada por:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Solução:

Considere uma reta qualquer de equação $y = m \cdot x + h$. Esta reta será tangente à hipérbole quando o sistema abaixo tiver apenas uma solução:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = m \cdot x + h \end{cases}$$

Do sistema:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{(m \cdot x + h)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2 \cdot x^2 - a^2 \cdot m^2 \cdot x^2 - 2a^2 \cdot m \cdot h \cdot x - a^2 \cdot h^2 = a^2 \cdot b^2$$

Para que a solução seja única, a equação do segundo grau acima deve ter determinante nulo:

$$\Delta = 4a^4 \cdot m^2 \cdot h^2 - 4 \cdot \left(b^2 - a^2 \cdot m^2\right) \cdot \left(-a^2 \cdot h^2 - a^2 \cdot b^2\right) = 0$$

$$\Rightarrow a^2 \cdot m^2 \cdot h^2 + \left(b^2 - a^2 \cdot m^2\right) \cdot \left(h^2 + b^2\right) = 0$$

$$\Rightarrow b^2 \cdot h^2 + b^4 - a^2 \cdot m^2 \cdot b^2 = 0$$

$$\Rightarrow h^2 = a^2 \cdot m^2 - b^2$$

Logo as retas $y = m \cdot x \pm \sqrt{a^2 \cdot m^2 - b^2}$ serão sempre tangentes à hipérbole:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Exemplo 3.4.i Use o resultado do exemplo anterior e determine a Equação (e identifique o Lugar Geométrico descrito) da interseção de duas tangentes perpendiculares a uma hipérbole dada.

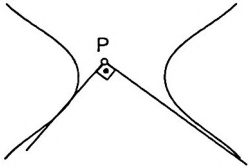


Figura 3.4.15

Solução:

Considere a representação da hipérbole na forma canônica: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Conforme demonstrado no exemplo anterior, uma das tangentes pode ser escrita de forma:

$$y = m \cdot x \pm \sqrt{a^2 \cdot m^2 - b^2}$$

A segunda tangente deve ser perpendicular a esta, logo sua equação deve ser da forma:

$$y = -\frac{1}{m} \cdot x + h$$

Novamente, usando o exemplo anterior, para que a reta acima seja tangente à hipérbole, devemos ter:

$$h = \sqrt{\frac{a^2}{m^2} - b^2}$$

Logo, as equações de duas retas tangentes à hipérbole, e perpendiculares entre si, são da forma:

$$\begin{cases} y = m \cdot x + \sqrt{a^2 \cdot m^2 - b^2} \\ y = -\dfrac{1}{m} \cdot x + \sqrt{\dfrac{a^2}{m^2} - b^2} \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} y - m \cdot x = \sqrt{a^2 \cdot m^2 - b^2} \\ m \cdot y + x = \sqrt{a^2 - m^2 \cdot b^2} \end{cases}$$

Elevemos ambas as equações acima ao quadrado:

$$\begin{cases} y^2 + m^2 \cdot x^2 - 2m \cdot x \cdot y = a^2 \cdot m^2 - b^2 \\ m^2 \cdot y^2 + x^2 + 2m \cdot x \cdot y = a^2 - m^2 \cdot b^2 \end{cases}$$

Seja $P = (x_0, y_0)$ a interseção destas duas retas. Somemos as duas equações acima aplicadas no ponto P.

A equação do lugar geométrico de P será:

$$\boxed{x_0^2 + y_0^2 = a^2 - b^2}$$

Esta equação nos diz que o L.G. da interseção de duas retas perpendiculares tangentes a uma hipérbole representa uma **circunferência** de centro coincidente com o centro da hipérbole e raio $\sqrt{a^2 - b^2}$.

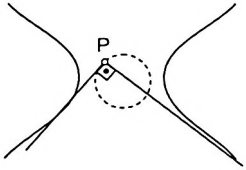


Figura I

No caso da hipérbole equilátera (a = b), haverá apenas um ponto a partir do qual as tangentes serão perpendiculares!

3.5. Análise Geométrica das Hipérboles

Estudaremos agora algumas propriedades geométricas das hipérboles. Muitas destas propriedades são bastante parecidas com as de elipses, ainda que valha a pena comentá-las separadamente. Para aquecer, vejamos um exemplo que ilustra o quanto a geometria pode simplificar um problema que daria um "trabalhão" se abordado analiticamente.

Exemplo 3.5.a (IME – 2006) Considere os pontos A = (–1,0) e B = (2,0) e seja C uma circunferência de raio R tangente ao eixo das abscissas na origem. A reta r_1 é tangente a C e contém o ponto A e a reta r_2 também à tangente a C e contém o ponto B. Sabendo que a origem não pertence às retas r_1 e r_2, determine a equação do lugar geométrico descrito pelo ponto de interseção de r_1 e r_2 ao se variar R no intervalo $(0,\infty)$.

Solução:

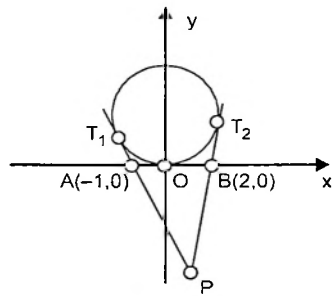


Figura I

Das propriedades vistas no capítulo 2 a respeito de potência de um ponto com relação a uma circunferência, sabemos que os segmentos definidos pelas tangentes traçadas de um ponto externo a uma circunferência são iguais. Segue que:

$$\overline{AT_1} = \overline{OA} = 1$$
$$\overline{BT_2} = \overline{OB} = 2$$

Pela mesma razão, as tangentes a partir de P têm comprimentos iguais:

$$\overline{PT_1} = \overline{PT_2} \Rightarrow \overline{PA} + \overline{AT_1} = \overline{PB} + \overline{BT_2}$$
$$\Rightarrow \overline{PA} + 1 = \overline{PB} + 2 \Rightarrow \overline{PA} - \overline{PB} = 1$$

Relembrando a definição de hipérbole (definição 3.4.1), temos que o lugar geométrico de P é:

P percorre uma **hipérbole** de focos A e B e constante 2a = 1

Construção Geométrica da Hipérbole

Como vimos para elipses, podemos pensar em diferentes maneiras de construir uma Hipérbole usando ferramentas de desenho. Vamos citar aqui duas delas bastante interessantes.

Construção 1

Esta primeira construção requer o uso de uma régua e um barbante.

Sobre o foco F_1 da hipérbole a ser traçada prega-se uma das extremidades da régua, de modo que a permitimos à mesma rotacionar em torno de F_1.

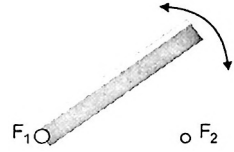


Figura 3.5.1

Prende-se um barbante na outra extremidade da régua. A outra extremidade do barbante é, então, fixa no outro foco F_2.

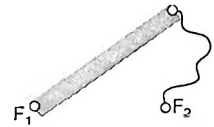


Figura 3.5.2

A ponta do lápis ajuda a esticar o barbante sempre junto à régua.

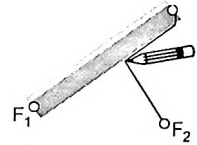


Figura 3.5.3

Seja R o comprimento constante da régua, e L o comprimento constante do barbante.

Notemos a seguinte geometria:

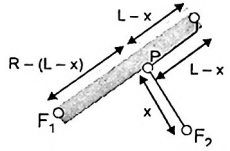


Figura 3.5.4

Note que: $\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = (R - (L - x)) - x = R - L = \text{constante}$

Ou seja, o ponto P traçado pelo lápis estará na hipérbole de focos F_1 e F_2. Movimentando a régua e seguindo os passos desta construção, traça-se um dos ramos da hipérbole. Por simetria, traça-se o segundo ramo da mesma maneira.

Construção 2

Sejam F_1 e F_2 os focos da hipérbole. Vamos traçar a circunferência C de centro em um dos focos e raio igual a constante 2a da hipérbole.

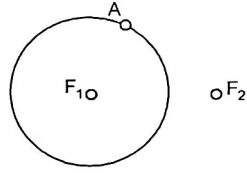


Figura 3.5.5

Tomando um ponto A qualquer sobre a circunferência C, tracemos a reta s ligando A e F_1. Em seguida, tracemos a reta mediatriz r do segmento $\overline{AF_2}$. Seja P a interseção de r com s.

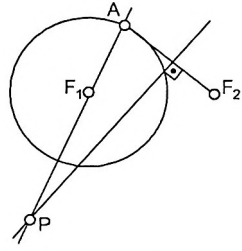


Figura 3.5.6

Notemos que, da construção, $\overline{PF_2} = \overline{PA}$

Mas, como $\overline{PA} = \overline{PF_1} + 2a$, temos que: $\overline{PF_2} - \overline{PF_1} = 2a = \text{constante}$

Esta construção determina o ponto P sobre a hipérbole de focos F_1 e F_2 e constante 2.a. À medida que tomamos outros pontos A sobre a circunferência, constrói-se a hipérbole.

A circunferência que aparece na construção 2 tem um nome especial e aparecerá nos resultados que veremos a seguir. Esta e outra circunferência merecem ser definidas e destacadas.

Circunferência Diretora

Considere a hipérbole de constante **2a**. A circunferência centrada em umfoco e com raio **2a** é chamada de **circunferência diretora** da hipérbole.

Definição 3.5.1

Circunferências Principal

Considere a hipérbole de constante **2a**. A circunferência centrada na origem e com raio **a** é chamada de **circunferência principal** da hipérbole.

Definição 3.5.2

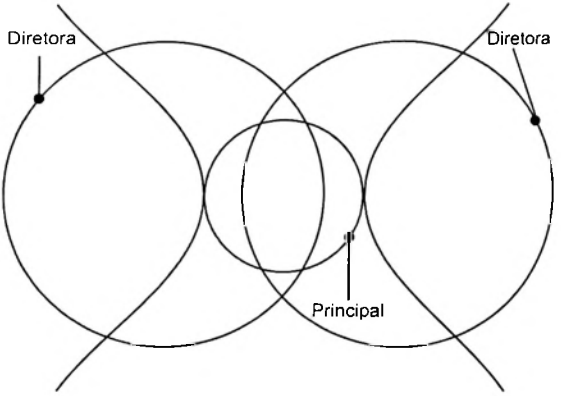


Figura 3.5.7

Propriedade Refletora da Hipérbole

Assim como a elipse, a hipérbole possui uma fascinante propriedade refletora. Vejamos os resultados a seguir.

Seja P um ponto de uma hipérbole de focos F e F'. A bissetriz interna do triângulo FPF' em P é tangente à hipérbole.

Resultado 3.5.1 – Teorema das Tangentes

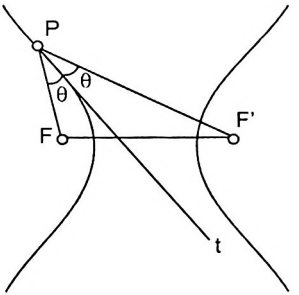


Figura 3.5.8

Demonstração:

Seja Q o simétrico de F com relação à reta t. Como t é bissetriz do ângulo FPQ, temos que será também mediatriz do segmento FQ.

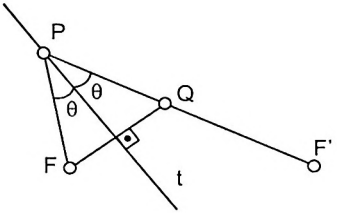


Figura 3.5.9

Portanto: $\overline{PF} = \overline{PQ}$ (Eq. I)

Além disso:

$$\overline{F'Q} = \overline{PF'} - \overline{PQ} = \overline{PF'} - \overline{PF} \quad \text{(Eq. II)}$$

Sendo P um ponto da hipérbole:

$$\overline{F'Q} = \overline{P'F} - \overline{PF} = 2a \quad \text{(Eq. III)}$$

Para mostrar que t é tangente à hipérbole, basta mostrar que P é o único ponto de t que pertence à hipérbole. Tomemos outro ponto, P', pertencente a t. Vamos mostrar que P' não pode pertencer à hipérbole.

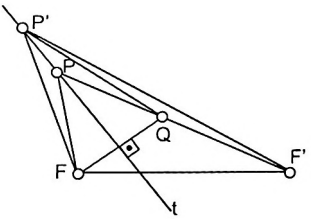


Figura 3.5.10

Como já exposto, t é mediatriz do segmento F'Q. Logo:

$$\overline{P'F} = \overline{P'Q} \qquad (\text{Eq. IV})$$

Do triângulo F'P'Q, usando a desigualdade triangular:

$$\overline{P'F'} + \overline{F'Q} > \overline{P'Q}$$

Das equações III e IV, segue:

$$\overline{P'F'} + 2a > \overline{P'Q} \quad \Rightarrow \quad \overline{P'F} - \overline{P'F'} < 2a$$

Logo, $\overline{P'F} - \overline{P'F'} \neq 2 \cdot a$, e portanto P' não está na hipérbole. Com isso, t é tangente à hipérbole.

O simétrico de um foco com relação a uma tangente está na circunferência diretora relativa ao outro foco.

Resultado 3.5.2

Demonstração:

Da equação III do desenvolvimento da demonstração do resultado anterior temos que, sendo Q o simétrico do foco F com relação à tangente t:

$$\overline{F'Q} = 2a$$

Logo, Q está na circunferência diretora relativa ao foco F'. □

Teorema de La Hire para Hipérboles

A projeção de um foco de uma hipérbole sobre uma tangente está na circunferência principal da hipérbole.

Resultado 3.5.3

Demonstração:

Sendo O a origem (ponto médio do segmento FF') e M a projeção do foco F sobre a tangente t, tem-se a seguinte figura:

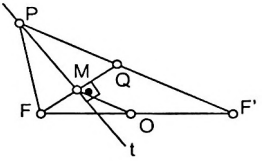


Figura 3.5.11

Da semelhança entre $\Delta FMO \sim \Delta FQF'$, temos: $\overline{OM} = \frac{1}{2} \cdot \overline{F'Q} = \frac{1}{2} \cdot 2a = a$

Portanto, M está na circunferência principal da hipérbole.

Exemplo 3.5.b Dada uma reta t tangente à hipérbole de os focos F e F', como encontrar geometricamente o ponto de tangência?

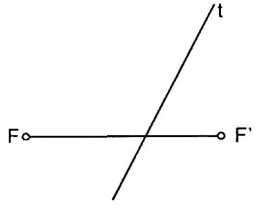


Figura 3.5.12

Solução:

Seja $T \in t$ o ponto de tangência procurado. Seja M' o simétrico de F' com relação à reta t. Desta construção sabemos que t é a mediatriz e bissetriz do triângulo M'TF'.

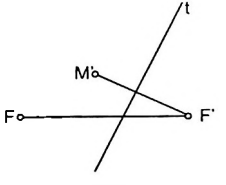


Figura I

Do resultado 3.5.1 sabemos que o t é bissetriz do ângulo $F\hat{T}F'$. Logo, M' está na reta que liga F e T. Para encontrarmos geometricamente o ponto T basta prolongarmos, portanto, a reta que liga F e M' até encontrar a reta t em T.

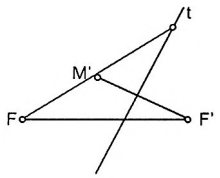


Figura II

Exemplo 3.5.c Considere uma hipérbole de focos F e F', e seja t uma reta tangente qualquer a esta hipérbole. Considere P e P' como a projeção de F e F' sobre a reta t. Use o Teorema de La Hire para mostrar que para qualquer que seja a tangente t, o produto $\overline{PF} \cdot \overline{P'F'}$ é constante.

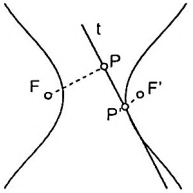


Figura 3.5.13

Solução:

Usando o Teorema de La Hire, temos que P e P' estão sobre a circunferência principal da hipérbole. Vamos tomar a reta r, paralela a t, também tangente à hipérbole. Seja Q a projeção de F sobre r.

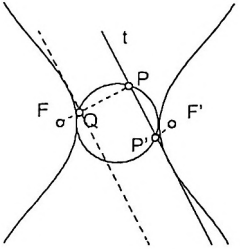


Figura 3.5.14

Da simetria, temos que: $\overline{QF} = \overline{P'F'}$, o que sugere que basta provarmos que o produto $\overline{QF} \cdot \overline{PF}$ é constante. Ora, mas o segmento que une P e Q é uma corda da circunferência principal (que é fixa, dada a hipérbole).

Pelo resultado 2.2.6, devido à potência do ponto F em relação à circunferência, sabemos que o produto $\overline{QF} \cdot \overline{PF}$ é constante.

OBS.: Vamos parar um pouco para refletir sobre o que acabamos de ver com estes últimos resultados.

Considere um ponto qualquer P sobre a hipérbole, e os raios vetores relativos a este ponto. Dos resultados que obtivemos anteriormente, sendo n e t as retas normal e tangente à elipse neste ponto P, temos a seguinte figura.

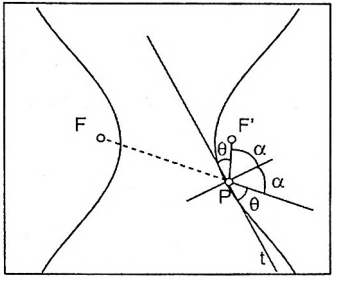


Figura 3.5.15

O raio vetor $\overline{F'P}$ reflete-se na hipérbole (na tangente no ponto) e segue em uma reta que possui a mesma direção do raio vetor $\overline{FP}$', respeitando a Lei da *Óptica de que o ângulo de incidência (ângulo que o raio vetor faz com a* normal em P) é igual ao ângulo de reflexão (ângulo que o raio vetor refletido faz com a normal em P). Esta propriedade é chamada de **propriedade refletora da hipérbole.**

Alguns espelhos, chamados refletores hiperbólicos usam esta propriedade. O primeiro espelho hiperbólico proposto, em 1672 por Cassegrain, utiliza um segundo espelho num formato de um hiperbolóide com o foco coincidindo com o foco do espelho principal parabólico com o objetivo de lançar a imagem (após refletida) diretamente no foco do outro ramo do hiperbolóide.

É interessante chamar a atenção a outra aplicação prática de hipérboles na engenharia. Você sabia que antes do desenvolvimento do GPS o sistema mais confiável de navegação se baseava unicamente no princípio do lugar geométrico chamado Hipérbole?

O sistema **LORAN** (Long Range Navigation) era usado para permitir a localização de um navio, por exemplo.

Imagine que estações de rádio em posições conhecidas emitam sinais que são recebidos pelo navio situado em uma posição, a princípio, desconhecida (P).

Pela diferença dos instantes em que os sinais foram recebidos conhece-se a diferença entre a posição P com relação às duas estações, uma vez que a velocidade de propagação do sinal no meio é conhecida (v).

$$t_1 - t_2 = \Delta t_{1,2} \Rightarrow \overline{PF_1} - \overline{PF_2} = v \cdot \Delta t_{1,2}$$

Ou seja, pelo intervalo de tempo entre a recepção dos dois sinais conhecemos o ramo de hipérbole onde localiza-se o navio. Basta uma 3ª estação emissora de sinal radio para que localizemos exatamente P.

$$t_1 - t_3 = \Delta t_{1,3} \Rightarrow \overline{PF_1} - \overline{PF_3} = v \cdot \Delta t_{1,3}$$

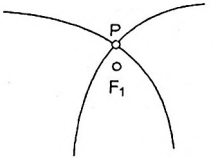


Figura 3.5.16

A interseção dos dois ramos de hipérbole será justamente o ponto P! Muito interessante, não é mesmo?

Teorema de Poncelet para Hipérboles

Teorema de Poncelet para Hipérbole

Seja P um ponto externo a uma hipérbole, a partir do qual traça-se as tangentes r e t, como na figura abaixo. Na figura, vale que:

$$\alpha = \alpha'$$
$$\beta = \beta'$$

Resultado 3.5.4

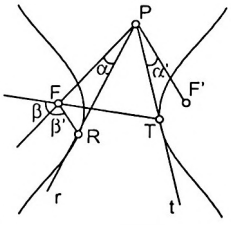


Figura 3.5.17

Demonstração:

Considere os pontos M e M' como sendo os simétricos de F e F' com relação à r e t, respectivamente. Do resultado 3.5.1 temos cuidado para observar que, nesta construção, os pontos R, M e F' serão colineares (o mesmo ocorrerá com T, M' e F).

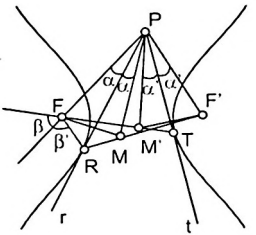


Figura 3.5.18

A partir desta construção teremos: $\overline{PF} = \overline{PM}$, $\overline{PF'} = \overline{PM'}$

Do resultado 3.5.2: $\overline{MF'} = \overline{M'F} = 2a$

Notaremos que os triângulos PMF' e PM'F são congruentes (pelo caso LLL).

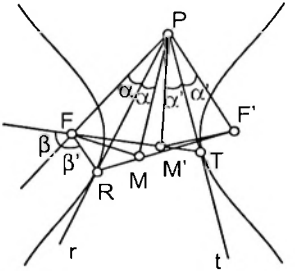


Figura 3.5.19

Sendo $M\hat{P}M' = \varphi$, da congruência tira-se:

$$F\hat{P}M' = M\hat{P}F' \Rightarrow 2\alpha + \varphi = 2\alpha' + \varphi \therefore \alpha = \alpha'$$

Isto conclui a primeira parte do teorema. Ainda da congruência, temos que os ângulos assinalados como θ a seguir são iguais. Da simetria da construção, encontramos o ângulo β' na interseção entre RF' e PM.

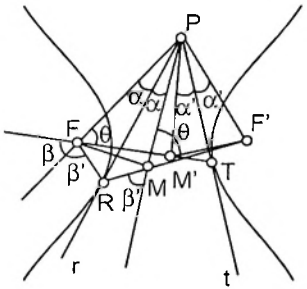


Figura 3.5.20

Dos ângulos opostos pelo vértices em F e M, segue que: $\theta = \beta = \beta'$, o que conclui a 2ª parte do teorema. □

Exemplo 3.5.d Resolva novamente o Exemplo 3.4.h , usando o Teorema de Poncelet.

Solução:

Na figura abaixo, seja M o simétrico de F com relação à reta r. Da construção temos que os ângulos $M\hat{P}R$ e $F\hat{P}R$ são iguais. Do teorema de Poncelet, estes ângulos são também iguais ao ângulo $F'\hat{P}T$.

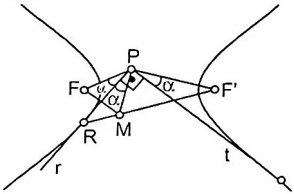


Figura I

Do esquema acima, temos: $M\hat{P}t = 90^\circ - \alpha$

E, com isso: $M\hat{P}F' = (90^\circ - \alpha) + \alpha = 90^\circ$

Logo o triângulo MPF' é retângulo. Lembrando que, do resultado 3.5.2, o segmento MF' vale 2.a, poderemos escrever que:

$$\overline{PM}^2 + \overline{PF'}^2 = (2a)^2$$

Mas, além disso, da simetria da construção temos $\overline{PF} = \overline{PM}$ e, portanto:

$$\overline{PF}^2 + \overline{PF'}^2 = 4a^2$$

Considerando o sistema de eixos canônicos, a equação obtida acima pode ser reescrita:

$$(x+c)^2 + y^2 + (x-c)^2 + y^2 = 4a^2 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 + 2c^2 + 2y^2 = 2a^2 + 2a^2$$
$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 = a^2 + \underbrace{(a^2 - c^2)}_{= b^2} = a^2 - b^2$$

Logo o lugar geométrico de P será uma circunferência de centro coincidindo com o da hipérbole, e raio igual a $\sqrt{a^2 - b^2}$.

3.6. Parábolas

A parábola é a terceira e última das seções cônicas que estudaremos. Vamos definir parábolas da seguinte forma:

O lugar geométrico dos pontos P que equidistam de uma reta d e um ponto F não pertencente à reta é uma parábola. O ponto F é denominado **foco** da parábola e a reta d, **diretriz** da parábola.

Definição 3.6.1

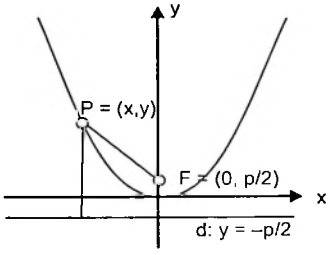


Figura 3.6.1

Para manter a coerência do que vem sendo feito nos casos das demais cônicas, chamemos a distância entre o foco e a diretriz de **parâmetro da parábola**, e nos referiremos a esta distância pela letra p.

Definição 3.6.2

Vamos representar a equação do lugar geométrico em um sistema de eixos coordenados. Tomemos o par de eixos no R^2 tal que $y = -p/2$, seja a reta d e que F seja representado pelo par ordenado $F = (0,p/2)$ como na figura acima.

O ponto $P = (x,y)$ pertencerá à parábola de foco F e diretriz d se, e somente se:

$$d(P,d) = d(P,F)$$

Ou ainda:

$$\frac{\left|y + \frac{p}{2}\right|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = \sqrt{(x-0)^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2}$$

Desenvolvendo:

$$\left(y + \frac{p}{2}\right)^2 = x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \cancel{y^2} + 2y \cdot \frac{p}{2} + \cancel{\left(\frac{p}{2}\right)^2} = x^2 + \cancel{y^2} - 2y \cdot \frac{p}{2} + \cancel{\left(\frac{p}{2}\right)^2} \Rightarrow x^2 = 2p \cdot y$$

A equação da parábola é dada, portanto por:

$$\boxed{2p \cdot y = x^2}$$

Equação Canônica da Parábola com foco sobre eixo Oy

Se os eixos coordenados forem escolhidos tais que F esteja sobre o eixo Ox, e a reta d paralela ao eixo Oy, a equação da parábola se torna:

$$\boxed{2p \cdot x = y^2}$$

Equação Canônica da Parábola com foco sobre eixo Ox

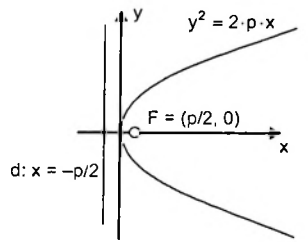


Figura 3.6.2 – Parábolas com foco sobre o eixo Ox

As formas canônicas da parábola também existem para os casos em que o foco se localiza na parte negativa dos eixos:

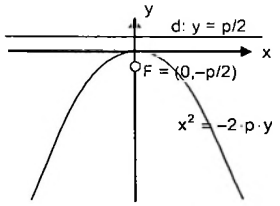


Figura 3.6.3 – Parábola com concavidade para baixo na forma Canônica

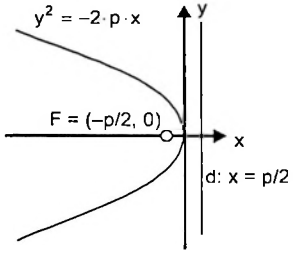


Figura 3.6.4 – Parábola com concavidade para a esquerda na forma canônica

A partir da equação da parábola algumas conclusões importantes são citadas:

(1) A parábola é simétrica com relação somente à reta que inclui o foco (chamado de **eixo principal** da parábola). Como não existe simetria dupla para a parábola dizemos que a parábola **não possui centro.**

(2) Existe um único ponto da parábola cuja distância à reta d é mínima. Neste caso, o ponto é (0,0). A este ponto daremos o nome de **vértice da parábola**.

(3) O vértice da parábola divide o segmento que liga a menor distância de F à d ao meio. Ou seja, sendo F' a projeção de F sobre d, o ponto médio do segmento FF' é o vértice da parábola.

(4) A aparência da equação da parábola está diretamente ligada ao sistema de eixos escolhido.

Analogamente ao que foi feito nos casos anteriores, se o eixo de simetria da parábola for paralelo a um dos eixos coordenados, porém o vértice estiver deslocado a um ponto (x_1, y_1) diferente da origem, a equação da parábola é escrita da seguinte forma:

$$\boxed{2p \cdot (y - y_1) = (x - x_1)^2}$$

Equação da Parábola com foco sobre reta paralela ao eixo Oy e vértice em (x_1, y_1)

Ou:

$$\boxed{2p\cdot(x - x_1) = (y - y_1)^2}$$

Equação da Parábola com foco sobre reta paralela ao eixo Oy e vértice em (x_1, y_1)

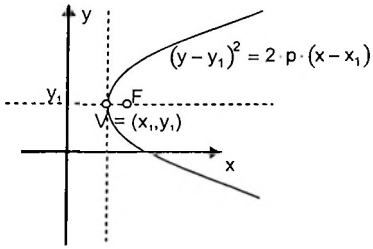


Figura 3.6.5 – Parábola transladada

Exemplo 3.6.a (ITA) São dadas uma circunferência de centro C e uma reta exterior s. Determine o lugar geométrico dos centros das circunferências que são tangentes exteriormente à circunferência dada e à reta s.

Solução: Vamos escolher um sistema de coordenadas tal que s coincida com o eixo das ordenadas, e a circunferência seja representada pela equação:

$$(x - a)^2 + y^2 = R^2 \quad , \quad a > R$$

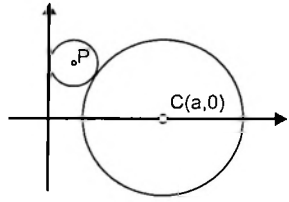


Figura I

Note que o raio da circunferência variável será dada pela distância do ponto P variável ao eixo Oy.

$$r = |x| = x$$

A distância do centro P ao centro C da circunferência dada será

$$d = r + R = x + R = \sqrt{(x - a)^2 + y^2}$$

Prosseguimos elevando a expressão acima ao quadrado:

$$x^2 + 2R \cdot x + R^2 = x^2 - 2a \cdot x + a^2 + y^2$$

$$\Rightarrow \quad y^2 = 2(a+R) \cdot x + \underbrace{R^2 - a^2}_{(a+R)(R-a)} \quad \Rightarrow \quad y^2 = 2(a+R) \cdot \left(x - \frac{(a-R)}{2} \right)$$

O lugar geométrico pedido é uma **parábola** com eixo principal perpendicular à reta s, parâmetro igual a (a + R) e vértice em $\left(\frac{a-R}{2}, 0 \right)$ no sistema adotado.

Exemplo 3.6.b Identifique a curva descrita pela seguinte equação:

$$x^2 - 6x + 8y - 15 = 0$$

Solução: Isolando y e completando quadrados para os termos em x:

$$x^2 - 6x + \underline{9} = -8y + 15 + \underline{9} \quad \Rightarrow \quad (x - 3)^2 = -8(y - 3)$$

Logo a equação descreve uma parábola com parâmetro igual a 4, vértice em (3,3), eixo principal paralelo ao eixo das ordenadas e concavidade para baixo.

Exemplo 3.6.c Determine o foco e a equação da diretriz da parábola abaixo:

$$y^2 - 4y + 3x + 7 = 0$$

Solução: Procedendo como no exemplo anterior, arruma-se a equação acima na seguinte forma: $(y - 2)^2 = -3(x + 1)$

Trata-se de uma parábola de eixo principal paralelo ao eixo das abscissas, vértice em (–1,2), concavidade para a esquerda e parâmetro igual a 3/2. Traçando o desenho fica mais fácil de determinarmos o foco e a diretriz.

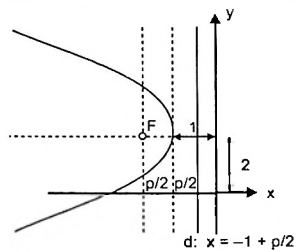


Figura I

$$F = \left(-\frac{7}{4}, 2 \right)$$
$$d : x = -\frac{1}{4}$$

Excentricidade da Parábola

A excentricidade de uma cônica qualquer já foi definida (definição 3.1.1). Pelo resultado do 2º Teorema de Dandelin, que diz que a excentricidade é a razão entre a distância de um ponto P ao foco F e a distância de P à diretriz d, segue que, no caso parábola, a excentricidade é sempre constante e vale 1.

A excentricidade de uma parábola é constante e igual a 1.

$$e = \frac{\overline{PF}}{\overline{Pd}} = 1$$

Resultado 3.6.1

Nos casos elipse e hipérbole a excentricidade variando nos dava uma forma diferente da curva. Na parábola, como a excentricidade vale sempre 1, o parâmetro p será o fator de influência sobre sua "aparência".

No caso da parábola $x^2 = 2 \cdot p \cdot y$ acima, aumentando p, a parábola parece estar "se abrindo", se aproximando de uma reta horizontal. Diminuindo p, a parábola "se fecha", se aproximando de um segmento de reta vertical.

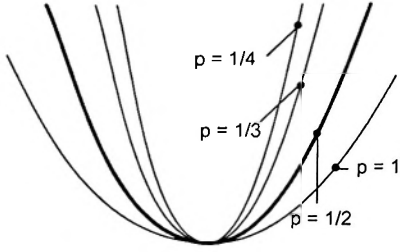


Figura 3.6.6

Raio Vetor da Parábola

Novamente, de forma análoga ao que foi feito para elipses e hipérboles, podemos definir o raio vetor de um ponto com relação a uma parábola.

Dada uma parábola e um ponto P pertencente à mesma, o vetor que liga seu foco a P é chamado de **raio vetor** (também chamado de **raio focal**) da parábola relativo ao ponto P.

Definição 3.6.3

É possível calcular uma expressão simplificada do comprimento dos raios vetores relativos a um ponto P. Vejamos a seguir:

Forma Polar do Raio Vetor:

Considere o raio vetor relativo ao foco F e a um ponto P da parábola. Seja θ o ângulo que o raio vetor faz com o eixo que contém o foco F. O comprimento deste raio vetor será dado por:

$$r = \frac{p}{1 - \cos\theta}$$

Resultado 3.6.2

Demonstração:

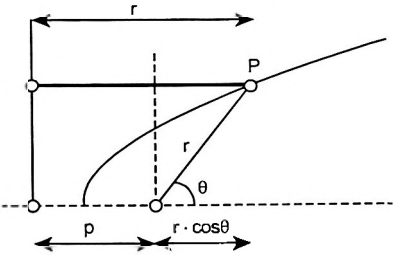


Figura I

Da figura I, anterior:

$$r = p + r \cdot \cos\theta$$

Com isso:

$$r = \frac{p}{1 - \cos\theta} \quad \square$$

Que coincidência! Como e = 1 para parábolas, a expressão do raio focal também será dada por:

$$r = \frac{p.e}{1 - e.\cos\theta}$$

OBS.: Vimos que para as 3 cônicas o comprimento do raio vetor é dado por

$$r = \frac{p \cdot e}{1 \pm e \cdot \cos\theta}$$

Esta expressão, que define a posição de um ponto em função de suascoordenadas r e θ é chamada de Equação Polar das Cônicas.

A dedução de Kepler para as órbitas gravitacionais prova que um corpo sobatuação de uma força central gravitacional obedece a uma equaçãoexatamente do tipo:

$$r = \frac{p \cdot e}{1 \pm e \cdot \cos\theta}$$

O valor do parâmetro e, que depende de fatores envolvendo a energia dosistema gravitacional, definirá o tipo de órbita (elipse, hipérbole ou parábola).

Se prolongarmos o segmento PF até atingir novamente a parábola em P', o segmento PP' será uma chamada **corda focal**. De maneira geral, definimos:

Se P e P' são dois pontos da parábola tal que o segmento PP' contém um foco F, então PP' é chamado de uma **corda focal** da parábola.

Definição 3.2.4

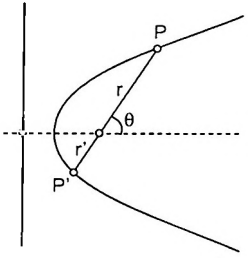


Figura 3.6.8

De maneira exatamente análoga aos casos elipse e hipérbole, deduz-se:

Forma Polar de uma Corda Focal;

Considere uma corda focal definida pelo segmento PP', com P e P' sobre a parábola, passando por um foco. Seja θ o ângulo que a corda faz com o eixo que contém o foco F. O comprimento desta corda PP' será:

$$\overline{PP'} = \frac{2p}{1 - \cos^2\theta}$$

Resultado 3.6.3

Latus Rectum

A corda focal perpendicular ao eixo que contém o foco da parábola tem comprimento igual a

$$\lambda = 2p$$

Este comprimento é chamado de **Latus Rectum** da Parábola.

Resultado 3.6.4

Demonstração:

A expressão de uma corda focal qualquer é: $\overline{PP'} = \dfrac{2p}{1 - \cos^2\theta}$

O comprimento do Latus Rectum é encontrado fazendo $\theta = 90°$ na expressão acima.

$$\overline{PP'} = \frac{2p}{1 - \cos^2 90"} = 2p \quad \square$$

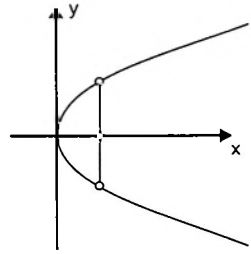


Figura 3.6.9

Como **exercício**, mostre que o Latus Rectum é também a corda focal de comprimento mínimo.

Exemplo 3.6.d Determine o comprimento da corda focal L que faz 60° com o eixo de simetria da parábola.

Solução:

$$L = \frac{2p}{1 - \cos^2(60°)} = \frac{2p}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{8p}{3} \quad \therefore \quad \boxed{L = \frac{8p}{3}}$$

Reta Tangente à Parábola

Equação da Reta Tangente à Parábola:

Considere a parábola dada a seguir e o ponto $P = (x_o, y_o)$.

$$x^2 = 2p \cdot y$$

A equação da reta tangente à parábola em P é dada por:

$$x_o \cdot x = p \cdot (y + y_o)$$

Resultado 3.6.5

Demonstração:

O resultado acima é bem parecido com o que já vimos para Elipses e Hipérboles. Vamos proceder de maneira exatamente análoga para demonstrá-lo.

Uma reta qualquer pode ser representada por $y = m \cdot x + h$. Como P pertence à reta, temos:

$$y_o = m \cdot x_o + h \Rightarrow h = y_o - m \cdot x_o$$

O sistema abaixo nos dá as interseções da hipérbole e da reta:

$$\begin{cases} y = m\,(x - x_o) + y_o \\ x^2 = 2p \cdot y \end{cases}$$

Para que a reta seja tangente, a solução do sistema deve ser única!

$$x^2 - 2p \cdot \left(m \cdot (x - x_o) + y_o\right) = 0$$

A solução desta equação do 2º grau deve ser única. Como já conhecemos esta solução ($x = x_o$), temos:

$$x^2 - 2p \cdot \left(m \cdot (x - x_o) + y_o\right) \equiv (x - x_o)^2$$

Da identidade: $\begin{cases} -2p \cdot m = -2x_o \\ 2p \cdot m \cdot x_o - 2p \cdot y_o = x_o^2 \end{cases}$

Desenvolvendo a primeira equação resultante da identidade de Polinômios acima, temos:

$$m = \frac{x_o}{p}$$

Como a reta contém o ponto $P = (x_o, y_o)$:

$$y_o = \left(\frac{x_o}{p}\right) \cdot x_o + h \Rightarrow h = y_o - \frac{x_o^2}{p} = y_o - \frac{2p \cdot y_o}{p} = -y_o$$

Com isso, temos que a equação da reta tangente é dada por:

$$y = \left(\frac{x_o}{p}\right)\cdot x - y_o \quad \Rightarrow \quad p\cdot(y + y_o) = x\cdot x_o \quad \square$$

OBS. 1: O resultado acima pode ser facilmente demonstrado diferenciando a equação da parábola com respeito a x:

$$\frac{d}{dx}(x^2) = \frac{d}{dx}(2p\cdot y) \quad \Rightarrow \quad 2x = 2p\cdot y' \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{x}{p}$$

$$y_o\cdot y = p\cdot(x + x_0)$$

Aplicando o ponto (x_0,y_0) na expressão da derivada y' acima, temos a inclinação da reta tangente neste ponto. Ou seja:

$$m = \frac{x_o}{p}$$

O restante da demonstração é análogo ao que foi feito acima.

OBS. 2: De maneirar análoga poderíamos demonstrar que a equação da reta tangente e m P = (x_0,y_0) à parábola $y^2 = 2p\cdot x$ é dada por:

$$y_o\cdot y = p\cdot(x + x_o)$$

Se a equação da parábola fosse $y^2 = -2p\cdot x$, a equação da reta tangente seria:

$$y_o\cdot y = -p\cdot(x + x_o)$$

Exemplo 3.6.e Seja uma parábola de foco F e diretriz d. Por um ponto P pertencente a d, traçam-se tangentes à parábola que a interceptam em M_1 e M_2. Demonstre que M_1, M_2 e F estão em linha reta.

Solução: Considere o sistema de eixos tal que a parábola seja escrita na forma $2p\cdot y = x^2$.

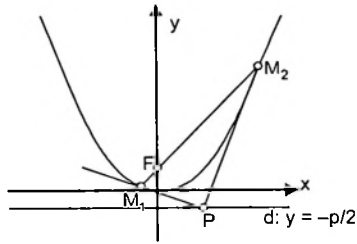


Figura I

Um ponto qualquer da diretriz terá coordenadas: $P = \left(x_0, -\frac{p}{2}\right)$

A equação das retas tangentes à parábola em $M_1 = (x_1, y_1)$ e $M_2 = (x_2, y_2)$ são dadas por:

$$\begin{cases} x_1 \cdot x = p \cdot (y + y_1) \\ x_2 \cdot x = p \cdot (y + y_2) \end{cases}$$

O ponto de encontro destas duas retas deverá ser P. Logo P deve ser solução do sistema acima. Resolvendo para y:

$$y = -\frac{p}{2} = \frac{y_2 \cdot x_1 - y_1 \cdot x_2}{x_2 - x_1} \Rightarrow y_2 \cdot x_1 - y_1 \cdot x_2 - \frac{p}{2} \cdot x_1 + \frac{p}{2} \cdot x_2 = 0 \qquad \text{(Eq. I)}$$

Vamos verificar que $F = (0, p/2)$, $M_1 = (x_1, y_1)$ e $M_2 = (x_2, y_2)$ são colineares:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ 0 & \frac{p}{2} & 1 \end{vmatrix} = x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot \frac{p}{2} - x_1 \cdot \frac{p}{2} - x_2 \cdot y_1 \overset{\text{Eq. I}}{=} 0$$

Como o determinante é nulo, os 3 pontos são colineares.

Exemplo 3.6.f Mostre que a reta $y = m \cdot x - \frac{m^2 \cdot p}{2}$ é sempre tangente parábola dada por:

$$x^2 = 2p \cdot y$$

Solução: Considere uma reta qualquer de equação $y = m \cdot x + h$. Esta reta será tangente à parábola quando o sistema abaixo tiver apenas uma solução:

$$\begin{cases} x^2 = 2p \cdot y \\ y = m \cdot x + h \end{cases}$$

Do sistema: $x^2 = 2p \cdot (m \cdot x + h) \Rightarrow x^2 - 2p \cdot m \cdot x - 2p \cdot h = 0$

Para que a solução seja única, a equação do segundo grau acima deve ter determinante nulo:

$$\Delta = 4p^2 \cdot m^2 + 8p \cdot h = 0$$

Ou ainda: $h = -\frac{m^2 \cdot p}{2}$

Logo as retas $y = \pm m \cdot x - \frac{m^2 \cdot p}{2}$ serão sempre tangentes à parábola $x^2 = 2p \cdot y$.

Exemplo 3.6.g Determine o LG dos pontos de onde se pode traçar tangentes perpendiculares a uma parábola P

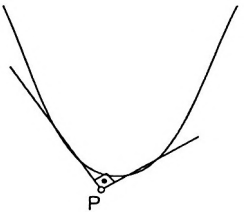


Figura 3.6.10

Solução: Considere a parábola representada na forma: $x^2 = 2p \cdot y$. Conforme demonstrado no exemplo anterior, uma das tangentes pode ser escrita de forma:

$$y = m \cdot x - \frac{m^2 \cdot p}{2}$$

A segunda tangente deve ser perpendicular a esta, logo sua equação deve ser da forma:

$$y = -\frac{1}{m} \cdot x + h$$

Novamente, usando o exemplo anterior, para que a reta acima seja tangente à parábola, devemos ter:

$$h = \frac{-\frac{1}{m^2} \cdot p}{2} = -\frac{p}{2 \cdot m^2}$$

Logo, as equações de duas retas tangentes à parábola, e perpendiculares entre si, são da forma:

$$\begin{cases} y = m \cdot x - \dfrac{m^2 \cdot p}{2} \\ y = -\dfrac{1}{m} \cdot x - \dfrac{p}{2 \cdot m^2} \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} 2y - 2m \cdot x = -m^2 \cdot p \\ 2m^2 \cdot y + 2m \cdot x = -p \end{cases}$$

A solução do sistema será $P = (x_0, y_0)$ variável. Vamos eliminar o parâmetro m ao somar as duas equações:

A equação do lugar geométrico de P será: $\boxed{y_o = -\frac{p}{2}}$

Esta equação nos diz que o L.G. da interseção de duas retas perpendiculares tangentes a uma parábola representa uma reta localizada p/2 unidades abaixo da tangente pelo vértice da parábola. Ora, esta reta é a **diretriz** parábola!

Resumindo, para todo ponto da diretriz, as tangentes à parábola a partir deste ponto são perpendiculares entre si.

3.7. Análise Geométrica das Parábolas

Assim como no caso das elipses e hipérboles há muitas propriedades geométricas interessantes relativas a parábolas. No caso das parábolas também, a abordagem geométrica pode também simplificar a nossa vida!

Vamos começar olhando o exemplo 3.6.a com outros olhos.

São dadas uma circunferência de centro C e uma reta exterior s. É pedido que se determine o lugar geométrico dos centros P das circunferências que são tangentes exteriormente à circunferência dada e à reta s.

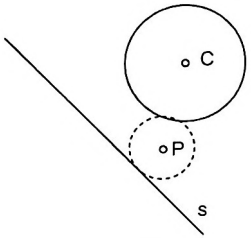


Figura 3.7.1

Note que a distância de P a C é dada por R + r onde R é o raio da circunferência dada e r é o raio da circunferência variável. Se criarmos uma segunda reta t, paralela a s, distando R da mesma, teremos que a distância de P à reta t também será R + r.

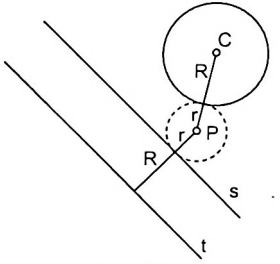


Figura 3.7.2

Logo P percorre uma parábola de foco em C e diretriz paralela à s (distando R da mesma), precisamente o resultado encontrado analiticamente no exemplo 3.6.a.

Construção Geométrica da Parábola

Conforme já vimos com os casos anteriores, o problema da construção de uma seção cônica é um problema de geometria intrigante. Vamos pensar em maneiras de construir a parábola utilizando apenas ferramentas simples de desenho.

Construção 1:

Suponhamos que são dados uma reta d (a diretriz) e um ponto F (o foco) não pertencente a esta reta.

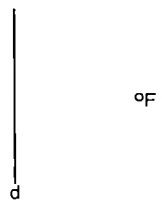


Figura 3.7.3

Com uma dada abertura do compasso, marca-se uma circunferência em torno do ponto F. Usando esta mesma distância de abertura traça-se uma reta paralela a d.

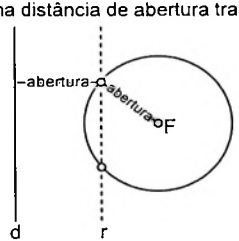


Figura 3.7.4

Se para dada abertura não houver interseção entre a reta e a circunferência traçadas, façamos uma abertura de compasso maior e repetimos o processo.

Uma vez que para os dois pontos de interseção teremos que suas distâncias ao ponto F e à d serão iguais, concluimos que estes pontos serão pontos da parábola de foco F e diretriz d.

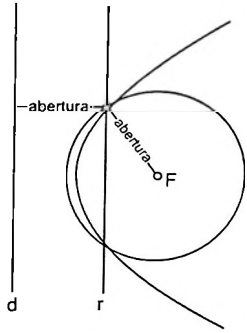


Figura 3.7.5

Repetindo para várias aberturas de compasso, obteremos cada vez mais pontos da parábola.

Construção 2:

A 2ª construção não será justificável de maneira tão óbvia quanto a primeira. Trabalharemos logo em seguida para justificar (demonstrar) esta construção com resultados geométricos da parábola.

Novamente, suponhamos que são dados uma reta d (a diretriz) e um ponto F (o foco) não pertencente a esta reta.

A partir de um ponto D qualquer da reta d, traça-se uma perpendicular.

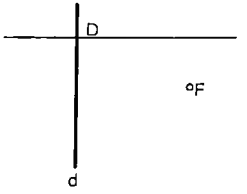


Figura 3.7.6

Em seguida, traça-se a reta mediatriz do segmento FD (isto é feito de maneira simples usando um compasso e uma régua. Reflita sobre como fazê-lo).

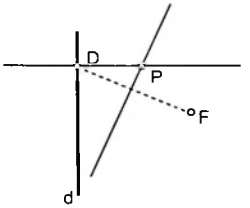


Figura 3.7.7

O ponto de interseção com a perpendicular será sempre um ponto da parábola.

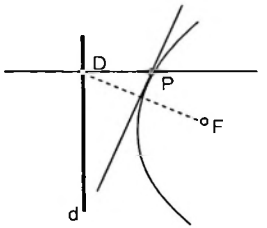


Figura 3.7.8

Propriedade Refletora da Parábola

Seja P um ponto da parábola de foco F e seja Q sua projeção sobre a diretriz. A bissetriz t do triângulo FPQ em P é tangente à parábola em P.

Resultado 3.7.1 – Teorema das Tangentes

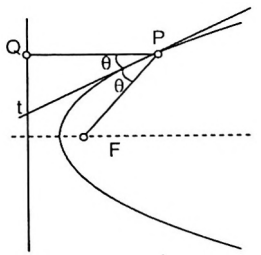


Figura 3.7.9

Demonstração:

Sabe-se que um ponto M qualquer com projeção M' sobre a diretriz pertencerá a parábola quando: $\overline{MF} = \overline{M'M}$. Um ponto M, portanto, não pertencerá a esta parábola quando $\overline{MF} \neq \overline{M'M}$.

Considere agora os pontos P, F e Q, bem como a reta t bissetriz interna do triângulo FPQ em P, mencionados no enunciado.

Da definição de parábola, o triângulo FPQ será isósceles. Neste triângulo a bissetriz t coincide com a mediatriz do segmento FQ.

Para mostrar que t é tangente à parábola, basta mostrar que P é o único ponto de t que pertence à parábola. Tomemos outro ponto, P', pertencente a t. Vamos mostrar que P' não pode pertencer à parábola.

Como t é mediatriz do segmento FQ, tem-se: $\overline{P'Q} = \overline{P'F}$ (Eq. I)

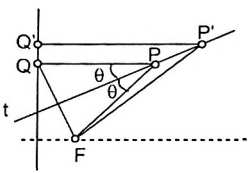


Figura 3.7.10

Mas sendo Q diferente de P, tem-se:

$$\overline{P'Q'} \neq \overline{P'Q} \quad \text{(Eq. II)}$$

Logo:

$$\overline{P'Q'} \neq \overline{P'F} \quad \text{(Eq. III)}$$

E, portanto, P' não pode pertencer à parábola. Com isso, t é tangente à parábola. □

Como resultado imediato do Teorema das tangentes podemos enunciar:

O simétrico de um foco F com relação a uma tangente pertence à diretriz da parábola.

Resultado 3.7.2

Demonstração:

Seja P o ponto de tangência e Q o simétrico do foco em relação a esta reta tangente. Do resultado 3.7.1, a tangente também é bissetriz do ângulo QPF. Neste caso, a bissetriz também é mediatriz relativa ao mesmo ângulo.

Da definição de mediatriz: $\overline{PQ} = \overline{PF}$ Da definição de parábola, Q pertence à diretriz da parábola de foco F. □

Exemplo 3.7.a Mostre que a projeção F' do foco F de uma parábola sobre uma tangente pertence à tangente ao vértice da parábola.

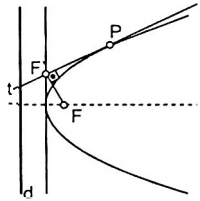


Figura 3.7.11

Solução:

Seja Q a projeção de P sobre a diretriz. Dos últimos resultados, podemos desenhar a seguinte figura. Nesta figura, tome r como sendo a reta paralela a d passando por F'.

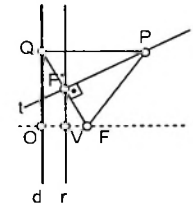


Figura 3.7.12

Como F' é ponto médio do segmento FQ e da semelhança entre os triângulos $\Delta F'VF$ e ΔQOF :

$$\frac{\overline{VF}}{\overline{OF}} = \frac{\overline{F'F}}{\overline{QF}} = \frac{1}{2} \quad \therefore \quad \overline{VF} = \frac{\overline{OF}}{2}$$

Como V é o ponto médio do segmento OF, V é o vértice da parábola, e r é tangente à parábola neste ponto.

A projeção do foco sobre uma tangente pertence à tangente ao vértice da parábola.

Resultado 3.7.3

Com os resultados que acabamos de ver, pedimos ao leitor, como **exercício**, que tente justificar a 2ª construção para parábolas que vimos no início desta seção.

Exemplo 3.7.b Dada uma reta t, o eixo principal da parábola r e o foco F, como encontrar geometricamente o ponto de tangência e a diretriz?

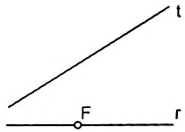


Figura 3.7.13

Solução:

Traça-se o simétrico de F (F') com relação a t. Por F' traçamos uma reta (s) paralela à r. De acordo com o resultado 3.7.2, a reta perpendicular a r, passando por F' será a reta diretriz da parábola. O ponto de encontro de s com t será o ponto de tangência à parábola.

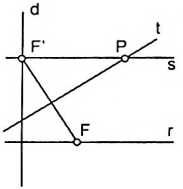
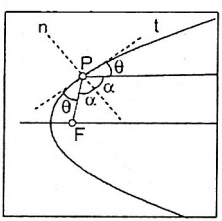


Figura I

OBS.: Mais uma vez, vamos refletir sobre estes últimos resultados obtidos.

Sendo P um ponto da parábola, juntando os resultados obtidos, chegamos à construção da seguinte figura, onde n e t são a normal e a tangente à parábola em P.



O raio vetor $\overline{FP}$ reflete-se na parábola (sobre a tangente no ponto) e segue em direção paralela ao eixo principal da parábola, respeitando a Lei da *Óptica de que o ângulo de incidência (ângulo que o raio vetor faz com a* normal em P) é igual ao ângulo de reflexão (ângulo que o raio vetor refletido faz com a normal em P). Esta propriedade é chamada de **propriedade refletora da parábola.**

Esta propriedade é a razão pela qual as antenas receptoras de ondas de rádios têm formato de um paraboloide (você certamente já ouviu falar de uma "antena parabólica", não?). As ondas vindas de todas as direções, do infinito, são refletidas na superfície da parábola de revolução e se concentram em um *único ponto (o foco), facilitando o tratamento posterior do sinal.*

Em outra aplicação, se concentrarmos uma fonte luminosa no foco de um refletor parabólico, os feixes se refletirão e se propagarão paralelamente ao eixo do refletor, formando um facho de luz. Este princípio é utilizado em holofotes, lanternas e faróis de carro.

Dois outros termos são comumente usados ao tratar-se de parábolas. Imagine um ponto P da parábola e as retas normal (n) e tangente (t) à parábola em P. Sejam N e T pontos de interseção das retas n e t, respectivamente, com o eixo principal da parábola.

Subnormal: Projeção ortogonal de PN sobre o eixo principal da parábola.

Definição 3.7.1

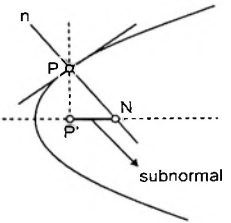


Figura 3.3.14

Subtangente: Projeção ortogonal de PT sobre o eixo principal da parábola.

Definição 3.7.2

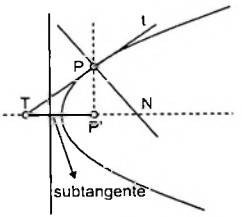


Figura 3.3.15

Exemplo 3.7.c É dada uma parábola e uma reta tangente a ela em um ponto P. Mostre que a subnormal relativa ao ponto P tem comprimento constante e igual ao parâmetro p da parábola.

Solução:

Seja Q o simétrico do foco F com relação à reta tangente t. De acordo com o resultado 3.7.2, Q estará sobre a diretriz da parábola. Do resultado 3.7.1, a reta t é também mediatriz do segmento QF, e com isso o segmento QF é paralelo ao segmento PN.

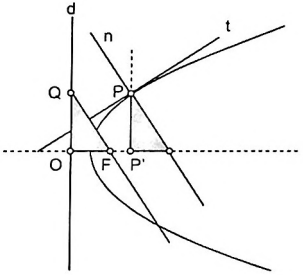


Figura I

Os triângulos OQF e P'PN são congruentes.

Lembrando que o parâmetro p da parábola é a distância entre a diretriz e o foco F, temos que:

$$\overline{P'N} = \text{subnormal} = \overline{OF} = p$$

Exemplo 3.7.d Mostre que o ponto médio de uma subtangente de uma parábola coincide com o vértice da parábola.

Solução:

Do resultado 3.7.1, a reta t é mediatriz do triângulo isósceles QTF. Como QP é paralelo ao eixo principal da parábola, os seguintes ângulos podem ser destacados:

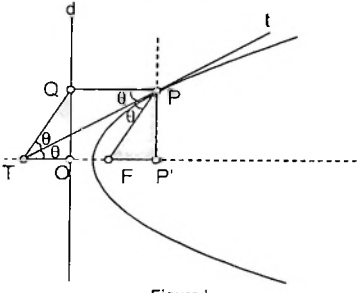


Figura I

Ou seja, o quadrilátero QPFT é um paralelogramo e, portanto os triângulos OQT e P'PF são congruentes.

Temos, então, que:

$$\overline{TO} = \overline{FP'}$$

Com isso, o ponto médio do segmento TP' será o ponto médio do segmento $\overline{OF}$, que é justamente o vértice da parábola.

Exemplo 3.7.e Determine as coordenadas do ponto P pertencente à parábola $2p \cdot x = y^2$ é tal que a subtangente e a subnormal relativas ao ponto P possuem o mesmo comprimento.

Solução:

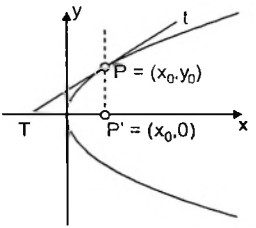


Figura I

Sendo $P = (x_0, y_0)$, a equação da reta tangente t em P é dada por:

$$y \cdot y_o = p \cdot (x + x_o)$$

O ponto de interseção desta reta com o eixo Ox será: $T = (-x_o, 0)$

A subtangente relativa ao ponto P terá comprimento: $\overline{TP'} = 2x_o$

Para que a subtangente tenha o mesmo comprimento da subnormal, segundo o resultado do exemplo 3.7.c, deveremos ter:

$$2x_o = p \quad \Rightarrow \quad x_o = \frac{p}{2}$$

Como P pertence à parábola, podemos descobrir o valor de sua ordenada:

$$y_o^2 = 2p \cdot x_o = p^2 \quad \Rightarrow \quad y_o = \pm p$$

Temos, portanto, 2 pontos P que atendem às condições do enunciado:

$$\boxed{\left(\frac{p}{2}, p\right) \text{ e } \left(\frac{p}{2}, -p\right)}$$

Teorema de Poncelet para Parábolas

Teorema de Poncelet para Parábolas

Seja P um ponto externo a uma parábola. Considere a reta s, paralela ao eixoprincipal da parábola, passando por P. A partir de P traça-se as tangentes r e t, como na figura abaixo. Na figura, vale que:

$$\alpha = \beta$$

Resultado 3.7.4

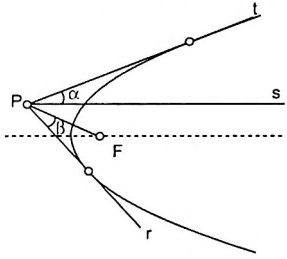


Figura 3.7.16

Demonstração:

Vamos considerar os simétricos T e R do foco F com relação às tangentes t e r.

Do resultado 3.7.2, sabemos que T e R estão sobre a diretriz da parábola. Portanto o segmento que liga T e R será perpendicular ao eixo principal (e à reta s).

Notaremos na figura a seguir que as retas t e r são mediatrizes do triângulo FTR, e portanto P será o circuncentro deste triângulo.

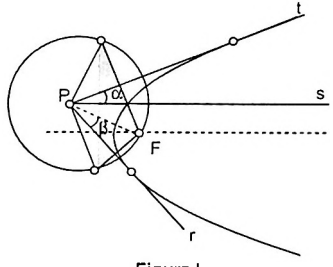


Figura I

Note que o ângulo $F\hat{T}R$ também vale a

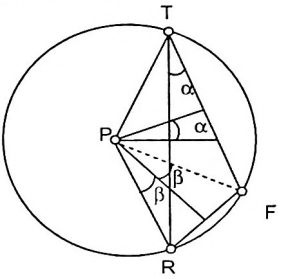


Figura II

Note que o arco RF vale, ao mesmo tempo 2β (ângulo central) e 2α, pois α é um ângulo inscrito).

Logo: $\alpha = \beta$. □

Exemplo 3.7.f Resolva novamente o exemplo 3.6.g usando o Teorema de Poncelet.

Solução:

Sejam S e S' os simétricos de F com relação às retas tangentes. Usando o Teorema de Poncelet destacamos os ângulos α na figura seguinte:

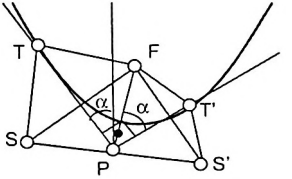


Figura I

Do resultado 3.7.1, temos que:

$$\begin{cases} S\hat{P}T = T\hat{P}F = 90^\circ - \alpha \\ S'\hat{P}T' = T'\hat{P}F = \alpha \end{cases}$$

Logo:

$$S\hat{P}S' = S\hat{P}T + T\hat{P}F + T'\hat{P}F + S'\hat{P}T'$$
$$= (90^\circ - \alpha) + (90^\circ - \alpha) + \alpha + \alpha = 180^\circ$$

Segue que S, P e S' são colineares. Ora, mas sabemos do resultado 3.7.2, que S e S' estão sempre sobre a diretriz. Logo, o ponto P estará sempre sobre a diretriz da parábola.

O L.G. dos pontos P a partir dos quais as tangentes à parábola são perpendiculares é a própria reta diretriz da parábola.

Exemplo 3.7.g (IME – 1996) Em uma parábola P com foco F e parâmetro p, considere uma corda MM' normal à parábola em M. Sabendo que o ângulo MFM' vale 90°, calcule os segmentos FM e FM'.

Solução:

Vamos traçar a figura ilustrativa do enunciado. Já fazendo uso dos resultados 3.7.1 e 3.7.4 e da geometria do triângulo retângulo, já destacamos os ângulos abaixo.

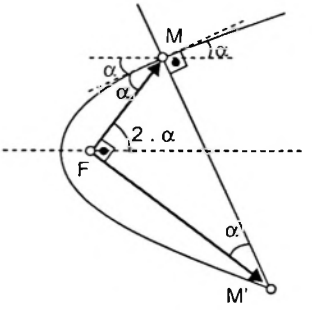


Figura I

Os segmentos FM e FM' são raios vetores com relação aos pontos M e M', respectivamente. Usando o resultado 3.6.2:

$$\begin{cases} \overline{FM} = \dfrac{p}{1 - \cos(2\alpha)} \\ \overline{FM'} = \dfrac{p}{1 - \cos\left(2\pi - \left(\dfrac{\pi}{2} - 2\alpha\right)\right)} = \dfrac{p}{1 - \cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + 2\alpha\right)} = \dfrac{p}{1 - \operatorname{sen}(2\alpha)} \end{cases}$$

Do triângulo MFM':

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\dfrac{p}{1 - \cos(2\alpha)}}{\dfrac{p}{1 - \operatorname{sen}(2\alpha)}} = \frac{1 - \operatorname{sen}(2\alpha)}{1 - \cos(2\alpha)}$$

Chegamos à seguinte equação trigonométrica:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1 - \operatorname{sen}(2\alpha)}{1 - \cos(2\alpha)}$$

Lembremos que podemos escrever $\operatorname{sen}(2\alpha)$ e $2\cos(2\alpha)$ em função de $\operatorname{tg}\alpha$:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(2\alpha) = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} \\ \cos(2\alpha) = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} \end{cases}$$

A equação trigonométrica torna-se, portanto:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1 - \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}}{1 - \left(\dfrac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}\right)} = \frac{1 - 2\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}^2\alpha} \quad \Rightarrow \quad 2\operatorname{tg}^3\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha + 2\operatorname{tg}\alpha - 1 = 0$$

A equação em $\operatorname{tg}\alpha$ acima tem uma única raiz real (verifique esta afirmativa com exercício): $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{2}$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \operatorname{sen}(2\alpha) = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{4}} = \dfrac{4}{5} \\ \cos(2\alpha) = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} = \dfrac{1 - \dfrac{1}{4}}{1 + \dfrac{1}{4}} = \dfrac{3}{5} \end{cases}$$

Finalmente, temos os valores dos raios vetores $\overline{FM}$ e $\overline{FM'}$

$$\begin{cases} \overline{FM} = \dfrac{p}{1 - \dfrac{3}{5}} = \dfrac{5}{2} \cdot p \\ \overline{FM'} = \dfrac{p}{1 - \dfrac{4}{5}} = 5p \end{cases}$$

$$\boxed{\overline{FM} = \frac{5}{2}p, \ \overline{FM'} = 5p}$$

Exemplo 3.7.h (1º Lema da Quadratura de Arquimedes) Considere um triângulo formado por 2 tangentes a uma parábola e por uma corda conectando os dois pontos de tangência A e B. Sejam:

- S é o ponto de encontro das duas tangentes (i.e., S é o terceiro vértice do triângulo).
- M é o ponto médio da base AB.

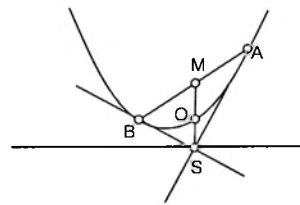


Figura 3.7.17

Mostre que a mediana MS do triângulo ABS é paralela ao eixo principal da parábola.

Solução:

Considere as projeções B' e A' de B e A, respectivamente, sobre a diretriz.

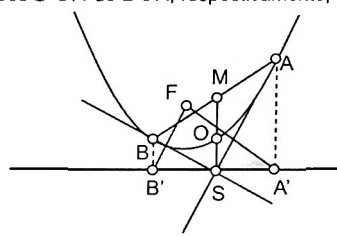


Figura I

Note que as retas suportes de BS e AS são mediatrizes do triângulo A'B'F (do resultado do exemplo 3.7.a).

Logo, S é o circuncentro do triângulo A'B'F. A 3ª mediatriz, que deve passar por S dividirá o segmento B'A' ao meio.

Observemos o trapézio ABB'A'. Como MS é perpendicular ao segmento B'A' e passa pelo seu ponto médio, é também base média deste trapézio.

Com isso, M é ponto médio da base AB e MS é paralelo ao eixo principal da parábola.

Exemplo 3.7.i (2º Lema da Quadratura de Arquimedes) Nas condições do problema anterior, sejam:

- O é o ponto de encontro de SM com a parábola.
- A_1 e B_1 os pontos em que a tangente à parábola em O cruza os lados do triângulo ABS.

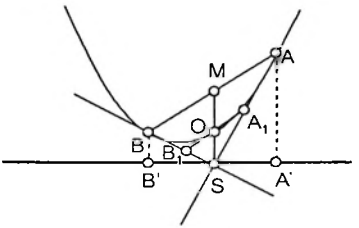


Figura 3.7.18

Mostre que A_1 e B_1 são pontos médios dos lados AS e BS do triângulo ABS, respectivamente, e que O é o ponto médio de MS.

Solução:

Note que os triângulos AA_1O e BB_1O estão na mesma condição do triângulo ABS no exemplo anterior. Com isso, a medianas a partir dos vértices A_1 e B_1 também são paralelas ao eixo da parábola.

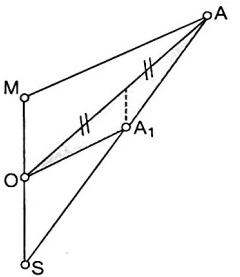


Figura I (Visão Detalhada do triângulo MAS)

Observe que tais medianas servem como base média nos triângulos AOS e BOS (o caso do triângulo AOS está ilustrado na figura I acima, em que a mediana referida é ilustrada por uma linha tracejada).

Segue, portanto que, A_1 é ponto médio do segmento AS, e B_1 é o ponto médio do segmento BS, concluindo a primeira parte da demonstração. □

Sendo A_1 e B_1 pontos médios dos lados AS e BS do triângulo ABS, temos que A_1B_1 é base média deste triângulo. Sabemos, portanto, que O corta no meio qualquer ceviana partindo de S (em particular, o segmento MS), concluindo a segunda parte da demonstração. □

Curiosidade: Quadratura da Parábola de Arquimedes

Sejam A e B pontos de uma parábola. Considere as duas tangentes a esta parábola em A e B se cruzando em um ponto S. A relação entre a área do segmento de parábola definido pela corda AB e a área do triângulo ABS é dada por:

$$A_{segmento} = \frac{2}{3} \cdot A_{ABS}$$

Resultado 3.7.5

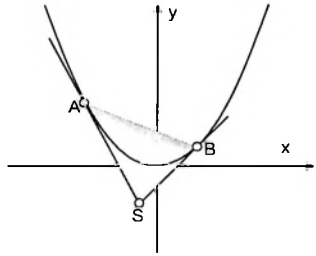


Figura 3.7.19

Demonstração:

A relação acima foi primeiro demonstrada por Arquimedes (287 – 212 a.C.) quando estudava somas infinitas. O resultado desenvolvido pelo matemático ficou conhecido como "Problema da Quadratura da Parábola".

Cerca de 2000 anos antes do Cálculo começar a existir, Arquimedes teve a ideia de preencher o segmento de parábola com triângulos cujas áreas seguiam uma soma geométrica já conhecida na época.

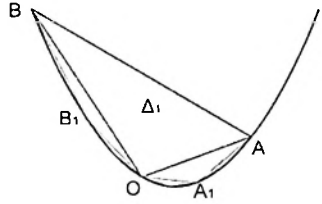


Figura 3.7.20

O primeiro triângulo da série é o triângulo ABO. Do resultado do exemplo 3.7.i, a área do triângulo ABO é metade da área do triângulo ABS.

$$\Delta_1 = A_{ABO} = \frac{1}{2} \cdot A_{ABS}$$

Considere agora o triangulo AOA_1. De maneira análoga traça-se triângulos interiores a este com área igual a metade de A_{AOA_1}.

Fazendo o mesmo para o triângulo BOB_1, teremos que a soma dos triângulos interiores será:

$$\Delta_2 = \frac{1}{2} \cdot A_{AOA_1} + \frac{1}{2} A_{BOB_1} = \frac{1}{2} \cdot \left(A_{AOA_1} + A_{BOB_1} \right)$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{8} \cdot A_{ABS} + \frac{1}{8} \cdot A_{ABS} \right) = \frac{1}{8} \cdot A_{ABS}$$

Repetindo este processo, teremos:

$$\Delta_3 = \frac{1}{4} \cdot \Delta_2 = \frac{1}{32} \cdot A_{ABS}$$
$$\Delta_4 = \frac{1}{4} \cdot \Delta_3 = \frac{1}{128} \cdot A_{ABS}$$
$$\Delta_5 = \frac{1}{4} \cdot \Delta_4 = \frac{1}{512} \cdot A_{ABS}$$
$$\ldots$$

Repetindo o processo infinitamente, os triângulos preencherão o segmento de parábola, de modo que:

$$A_{segmento} = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \ldots$$
$$= \frac{1}{2} \cdot A_{ABS} + \frac{1}{8} \cdot A_{ABS} + \frac{1}{32} \cdot A_{ABS} + \ldots$$
$$= A_{ABS} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \ldots \right)$$

Da expressão da soma de P.G.:

$$A_{segmento} = \frac{\frac{1}{2} \cdot A_{ABS}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3} \cdot A_{ABS} \quad \square$$

O problema da quadratura da parábola de Arquimedes resulta em um 2º resultado semelhante. A demonstração por construção geométrica é semelhante à que acabamos de fazer. Deixamos como **exercício** ao leitor (somente àqueles que forem realmente curiosos).

Sejam A e B pontos de uma parábola. Projeta-se o ponto médio M do segmento AB sobre a parábola em C. A relação entre a área do segmento de parábola destacado abaixo e a área do triângulo ABC é dada por:

$$A_{segmento} = \frac{4}{3} \cdot A_{ABC}$$

Resultado 3.7.6

Para variar um pouco, mostraremos o resultado através do uso de cálculo Integral (nos exercícios de fixação propõe-se uma solução puramente analítica, sem uso de Cálculo).

Note como a solução de Arquimedes se aproximava de conceitos de Cálculo, mesmo muitos anos antes do mesmo ser desenvolvido!

Demonstração:

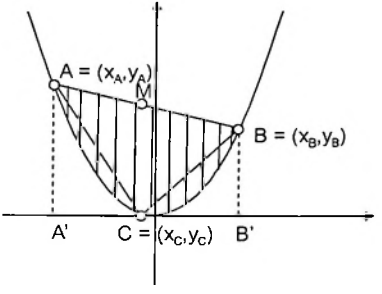


Figura 3.7.20

Sendo a equação da parábola dada por $y = \frac{1}{2 \cdot p} \cdot x^2$, temos que:

$$A_{segmento} = A_{ABB'A'} - \int_{x_A}^{x_B} \frac{1}{2p} \cdot x^2 \cdot dx$$

Desenvolvendo a equação acima, usando a fórmula da área do trapézio para o cálculo de $A_{ABB'A'}$ tem-se

$$A_{segmento} = \frac{(x_B - x_A) \cdot (y_A + y_B)}{2} - \frac{1}{2p} \cdot \left(\frac{x_B^3}{3} - \frac{x_A^3}{3} \right)$$

$$= \frac{(x_B - x_A)\cdot\left(\frac{1}{2p}\cdot x_A^2 + \frac{1}{2p}\cdot x_B^2\right)}{2} - \frac{1}{2p}\cdot\left(\frac{x_B^3}{3} - \frac{x_A^3}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{2p}\cdot\left(\frac{x_B^3 - x_A^3 + 3x_B\cdot x_A^2 - 3x_A\cdot x_B^2}{6}\right) \qquad \text{(Eq. I)}$$

Calculemos agora a área do triângulo ABC, em função de x_A e x_B.

$$A_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} x_A & \frac{1}{2p}\cdot x_A^2 & 1 \\ x_B & \frac{1}{2p}\cdot x_B^2 & 1 \\ \left(\frac{x_A + x_B}{2}\right) & \frac{1}{2p}\cdot\left(\frac{x_A + x_B}{2}\right)^2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{4p}\cdot\begin{vmatrix} x_A & x_A^2 & 1 \\ x_B & x_B^2 & 1 \\ \left(\frac{x_A + x_B}{2}\right) & \left(\frac{x_A + x_B}{2}\right)^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{4p}\cdot\begin{vmatrix} x_A\cdot x_B^2 + x_A^2\cdot\left(\frac{x_A + x_B}{2}\right) + x_B\cdot\left(\frac{x_A + x_B}{2}\right)^2 - \\ -x_B^2\cdot\left(\frac{x_A + x_B}{2}\right) - x_A^2\cdot x_B - x_A\cdot\left(\frac{x_A + x_B}{2}\right)^2 \end{vmatrix}$$

$$A_{ABC} = \frac{1}{1\,p}\cdot\left| x_A\cdot x_B^2 + x_A - x_A^2\cdot x_B - x_B\right|$$

De $x_B > 0$ e $x_A < 0$, tem-se $3x_A\cdot {x_B}^2 + {x_A}^3 - 3{x_A}^2\cdot x_B - {x_B}^3 < 0$

Com isso, de (II):

$$A_{ABC} = \frac{1}{16p}\cdot\left({x_B}^3 - {x_A}^3 + 3x_B\cdot {x_A}^2 - 3x_A\cdot {x_B}^2\right) = \frac{1}{16p}\cdot\left(12p\cdot A_{segmento}\right)$$

De onde, finalmente, tem-se que: $A_{segmento} = \frac{4}{3}\cdot A_{ABC}$

EUREKA !!!

Arquimedes
287 BC – c. 212 BC

3.8. Exercícios de Fixação

Exercício 3.1 (IME – 1980) Calcule os eixos e a excentricidade da cônica, seção por um plano π em um cone de revolução R, de vértice V, sabendo-se que:

1) A excentricidade da seção por π é a maior possível para o cone R.
2) V dista de π 6 unidades de comprimento.
3) R é tal que a seção por um plano perpendicular a uma geratriz é uma hipérbole equilátera.

Exercício 3.2 Dada uma elipse de eixo maior AA', considere todas as cordas da elipse traçadas a partir de A. Determine o lugar geométrico dos pontos médios dessas cordas.

Exercício 3.3 Dado um triângulo ABC de base AB fixa no plano. C desloca-se de modo que o perímetro do triângulo permaneça constante e igual a p. Determine o lugar geométrico descrito pelo baricentro do triângulo.

Exercício 3.4 Uma reta r, variável, de coeficiente angular 2, intercepta as retas $y = x$ e $y = -x$, respectivamente nos pontos P e Q. Determine o lugar geométrico do ponto M, pertencente a r, tal que o produto PM . QM é constante e igual a 5/9.

Exercício 3.5 (IME) Dados dois pontos fixos A e B (AB = d), considere as elipses passando por B, com foco em A e eixo maior de comprimento 2a, tal que $2a > d$. Determine o lugar geométrico do segundo foco F das elipses.

Exercício 3.6 Sejam os pontos A = (0,4) e B = (0,–4). Por B traça-se uma reta variável que intercepta o eixo das abscissas em C. Por A traça-se uma perpendicular à reta AC, que intercepta a reta BC em M. Determine o lugar geométrico do ponto M.

Exercício 3.7 Na elipse de excentricidade 1/2, foco na origem reta diretriz dada por $3x + 4y = 25$, determine:

a) O outro foco da elipse
b) A equação das diretrizes da elipse.

Exercício 3.8 O ponto M pertence a uma elipse de focos F' e F e com semieixos a = 5 e b = 4. Determine o lugar geométrico do incentro do triângulo MFF'.

Exercício 3.9 É dada uma circunferência de diâmetro AB = 12. Seja CD uma corda perpendicular a AB. Os pontos M e N dividem CD em 3 partes iguais. Determine o LG dos pontos M e N.

Exercício 3.10 Mostre que as equações paramétricas a seguir representam uma hipérbole:

$$\begin{cases} x = a \cdot \sec t + x_0 \\ y = a \cdot \operatorname{tgt} + y_0 \end{cases}, \quad t \in (-\pi, \pi) \text{ com discontinuidade em } \pm\frac{\pi}{2}$$

Sugira uma parametrização para a equação da parábola $x^2 = 2p \cdot y$.

Exercício 3.11 ✍ Seja D um ponto sobre a hipérbole de vértices P e P'. Usando o resultado da parametrização de hipérboles do exercício anterior, mostre que o produto dos coeficientes angulares de DP e DP' é constante.

Exercício 3.12 (IME 1991) Determine o quadrado OABC cujos vértices são a origem e os pontos A(1,1); B(0,2); C(–1,1). Seja F(0,1) o centro desse quadrado e (P) a parábola de foco F e cuja diretriz é o eixo das abscissas.

Pede-se:

a) Mostre que (P) passa por A e por C.
b) Determine a equação dessa parábola.
c) Calcule as coordenadas do ponto D, segundo ponto de intersecção da reta BC com (P).
d) Seja M um ponto qualquer de (P) cuja abscissa é x. Mostre que a potência de M em relação ao círculo de diâmetro CD é:

$$\frac{1}{4} \cdot (x + 1)^3 \cdot (x - 3)$$

Exercício 3.13 (IME – 1996) Um triângulo ABC tem base AB fixa sobre uma reta r. O vértice C desloca-se ao longo de uma reta s, paralela a r a uma distância h da mesma. Determine a equação descrita pelo ortocentro do triângulo ABC.

Exercício 3.14 Demonstrar que a área do paralelogramo limitado pelas assíntotas de uma hipérbole e as retas traçadas por qualquer de seus pontos e paralelas às assíntotas é constante.

Exercício 3.15 Sendo P um ponto de uma hipérbole equilátera, demonstre que a distância de P ao centro da hipérbole é igual à média geométrica dos raios focais de P.

Exercício 3.16 ✍ Seja M um ponto de uma hipérbole. Uma paralela ao eixo transverso passando por M corta as assíntotas em P e Q. Mostre que o produto $MQ \cdot MP$ é constante.

Exercício 3.17 ✍ Mostre que o produto das distâncias de um ponto da hipérbole às assíntotas é constante.

Exercício 3.18 🙎 **(IME 2004)** Considere a parábola P de equação $y = a \cdot x^2$ com a positivo e um ponto A de coordenadas (x_0,y_0), satisfazendo: $y_0 < a \cdot x_0^2$. Seja S a área do triângulo ATT', onde T e T' são os pontos de contato das tangentes a P passando por A. Pede-se que calcule o valor de S em função de a, x_0 e y_0. Em seguida, calcule a equação do lugar geométrico do ponto A, admitindo S constante. Identifique a cônica representada pela equação obtida.

Exercício 3.19 🙎 **(IME 2001)** Considere uma parábola de eixo focal OX que passe pelo ponto (0,0). Define-se subnormal em um ponto P da parábola como o segmento de reta ortogonal à tangente da curva, limitado pelo ponto P e o eixo focal. Determine a equação e identifique o lugar geométrico dos pontos médios das subnormais dessa parábola. ***OBSERVAÇÃO:*** *A definição de subnormal definida nesta questão não coincide com a definição que foi dada no capítulo 3.*

Exercício 3.20 Dados um sistema de eixos ortogonais XOY e um ponto A, de coordenadas (x_0,y_0) diferente da origem, considere dois pontos variáveis P e Q, P pertencente ao eixo OX e Q pertencente ao eixo Oy, tais que a área do triângulo APQ seja constante e igual a K real. Calcule e identifique a equação do lugar geométrico do ponto médio do segmento PQ.

Exercício 3.21 ✍ Pelo ponto P traçam-se as tangentes perpendiculares PM e PM' a uma parábola. Mostre que MM' é uma corda focal e que FP é perpendicular a MM'.

Exercício 3.22 De um ponto variável P traça-se uma reta de coeficiente angular m = 1, que intercepta a reta de equação 5x – 16 = 0 em um ponto Q. Sendo A = (5,0), determine o Lugar Geométrico dos pontos P sabendo-se que este se move de modo que PA = PQ.

Exercício 3.23 ✍ Mostre que se uma reta corta as assintotas em P e Q e a hipérbole em M e N, então PM = NQ.

Exercício 3.24 (IME 1987) Seja o semicírculo de diâmetro AB = 2R e r sua tangente em A. Liga-se um ponto P da reta r ao ponto B, interceptando o semicírculo no ponto C. Determine o lugar geométrico do ponto médio de AC, quando P desloca-se sobre a tangente.

Exercício 3.25 ✍ Uma reta tangente a uma hipérbole corta as assíntotas em P e Q. Sendo O o centro da hipérbole, mostre que o triângulo OPQ tem área constante.

Exercício 3.26 ✍ **(1º Teorema de Apolônio)** Seja Q um ponto de uma elipse. Traça-se a perpendicular QN onde N é a projeção de Q sobre o eixo maior AA'. Seja agora T o conjugado harmônico de N em relação a A e A'. Mostre que a reta que passa por T e Q é tangente à elipse.

Exercício 3.27 (IME 1995) Seja ABC um triângulo qualquer no qual os vértices B e C são fixos. Determine o Lugar Geométrico descrito pelo ponto A, variável, sabendo que os ângulos B e C satisfazem a relação $tgB \cdot tgC = k$, k constante real. Discuta a solução para os diversos valores de k. Considere como eixos coordenados as retas BC e a mediatriz do segmento BC.

Exercício 3.28 (Elipsógrafo de Arquimedes) Considere uma barra rígida de extremidades P e Q e comprimento fixo e igual a L. Considere também, um ponto R fixo, pintado, sobre a barra. Supondo que P e Q podem percorrer atrelados aos eixos Ox e Oy, respectivamente, prove que o lugar geométrico de R é uma elipse.

Exercício 3.29 (ITA – 2001) Determine o coeficiente angular da reta tangente à elipse de equação abaixo e que corta o eixo das abscissas em P(8,0).

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Exercício 3.30 (IME 1988) Seja ABCD um trapézio cuja base maior AB = a é fixa e cuja base menor CD tem comprimento constante igual a b. A soma dos lados não paralelos é constante e igual a L. Os prolongamentos dos lados não paralelos se cortam em I. Demonstre que o lugar geométrico descrito pelo ponto I, quando a base CD se desloca, é uma cônica.

Exercício 3.31 ✍ Considere 2 vetores de módulos diferentes v_1 e v_2, inicialmente apontando na mesma direção. Se $\bar{v}_1$ gira no sentido anti-horário com velocidade angular ω, e $\bar{v}_2$ gira no sentido horário com a mesma velocidade angular, mostre que a soma vetorial $\bar{v}_1 + \bar{v}_2$ descreve uma elipse.

Exercício 3.32 Considere a reta normal à parábola $y^2 = 2p \cdot x$ no ponto $\left(2p \cdot k^2, 2p \cdot k\right)$. Seja $\left(2p \cdot m^2, 2p \cdot m\right)$ o segundo ponto de encontro desta normal à parábola. Mostre que:

$$m \cdot k + k^2 + 2 = 0$$

Exercício 3.33 ✍ Determine o lugar geométrico do conjunto dos pontos a partir dos quais traça-se tangentes a uma parábola em T_1 e T_2, tais que as normais em T_1 e T_2 sejam perpendiculares.

Exercício 3.34 ✍ A normal a uma parábola $y^2 = 2p \cdot x$ em um ponto P encontra o eixo principal em G. Seja Q um outro ponto da parábola, tal que QG seja perpendicular ao eixo da parábola. Mostre que: $\overline{QG}^2 - \overline{PG}^2$ constante.

Exercício 3.35 Considere a elipse de focos F e F' e seja M um ponto qualquer da elipse. Mostre que o exincentro o triângulo MFF' com respeito ao lado MF estará sempre em uma mesma reta perpendicular à reta suporte de FF'. **Sugestão:** Use a expressão das coordenadas do exincentro deduzida no Exercício de Fixação 1.24.

Exercício 3.36 (Teorema das Borboletas) Seja M (0,k) o ponto médio da corda AB paralela ao eixo transverso da hipérbole. Através de M, 2 outras cordas CD e EF são traçadas. ED corta AB em P e CF corta AB em Q. Mostre que M é também ponto médio de PQ.

Exercício 3.37 (IME 1989) Seja uma elipse cujo eixo maior $AA' = 2 \cdot a$ e cuja excentricidade é 0,5. Seja F o foco da elipse, correspondente ao vértice A. Considere a parábola, cujo vértice é o ponto O, centro da elipse e cujo foco coincide com o foco F da elipse. Determine o ângulo entre as duas curvas nos pontos de intersecção.

Exercício 3.38 Seja a hipérbole de equação $x^2 - y^2 = 1$ e P um ponto variável desta hipérbole. Por P, traçam-se as retas de coeficientes angulares $\pm\sqrt{2}$, que interceptam a hipérbole em A e B. Determine o lugar geométrico do ponto médio do segmento AB.

Exercício 3.39 Seja a elipse $a^2 \cdot y^2 = b^2 \cdot \left(a^2 - x^2\right)$ e t uma tangente variável. Sejam M(x',0) e N(0,y') as interseções de t com os eixos coordenados. Determine a equação cartesiana do lugar geométrico descrito pelos pontos P(x',y') e esboce seu gráfico.

Exercício 3.40 ✍ **(IME – 1989)** Seja um triângulo ABC cujos lados são tangentes a uma parábola. Prove que o círculo circunscrito ao triângulo passa pelo foco.

Exercício 3.41 (IME – 1974) Considere um cone de revolução, cujo eixo forma com uma geratriz o ângulo α.

a) Determine o lugar geométrico dos focos de todas as parábolas, seções planas deste cone.
b) Seja P uma parábola, seção do cone dado, cujo vértice lista d do vértice do cone. Calcule, em função de d e de α, a área do segmento parabólico de P, compreendido entre P e uma corda que é perpendicular ao eixo P e que encontra o eixo do cone.

Exercício 3.42 Determine o lugar geométrico descrito pelos vértices das hipérboles equiláteras que passam pelo ponto M(2,3) e que admitem como eixo de simetria, não transverso, o eixo das ordenadas.

Exercício 3.43 (ITA – 2001) Seja o ponto A = (r, 0), com r > 0. O lugar geométrico dos pontos P = (x,y) tais que é de 3 . r^2 a diferença entre o quadrado da distância de P a A e o dobro do quadrado da distância de P à reta y = –r é?

Exercício 3.44 (IME 1984) Dá-se (P) uma parábola de foco F e diretriz d. Sejam M um ponto qualquer de P, M_1 sua projeção sobre d, M_2 a projeção de M_1 sobre FM. Identifique o lugar geométrico de M_2 quando M descreve a parábola P.

Exercício 3.45 Dados os pontos C = (0,4) e D = (0,-4) e a elipse $3x^2 + 5y^2 = 60$, traça-se para cada ponto M da cônica a reta CM que intercepta o seu eixo focal em N. Determine o lugar geométrico do ponto de interseção das retas OM e DN, onde O é a origem dos eixos coordenados.

Exercício 3.46 Considere duas circunferências C_1 e C_2, com raios r_1 e r_2, respectivamente ($r_1 < r_2$), tais que C_1 é tangente internamente a C_2. Considere agora uma terceira circunferência variável tangente externamente à C_1 e internamente à C_2. Determine o lugar geométrico do centro desta circunferência variável.

Exercício 3.47 ✍ Considere a parábola $y = x^2$ e o ponto variável P = (t, t^2) pertencente a parábola (t variando no conjunto dos reais). Seja h uma constante real, e os pontos A e B sobre a parábola com abcissas t – h e t + h, respectivamente. Mostre que a área do triângulo PAB é constante, independente de t.

Exercício 3.48 ✍ Nas condições do exercício anterior, considere o ponto Q da parábola que possui abcissa exatamente na metade do caminho entre as abcissas de P e A. Mostre que a área do triângulo QAP é constante, independente de t. Utilize este resultado para re-demonstrar o Teorema da Quadratura da Parábola de Arquimedes (Resultado 3.7.6)

4 CÔNICAS: TÓPICOS ESPECIAIS

4.1. Mudança de Coordenadas

No capítulo anterior aprendemos a reconhecer a equação de uma determinada seção cônica caso ela esteja representada em um sistema de eixos coordenados adequado. Comentamos também que a aparência da equação depende completamente do sistema de eixos em que ela está descrita.

Como exemplo, citamos a elipse de equação $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ da curva abaixo:

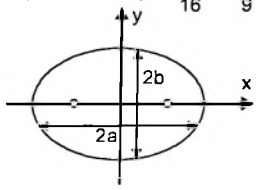


Figura 4.1.1

Esta mesma elipse (com mesmos semieixos e excentricidade), deslocada com relação ao sistema de eixos com abaixo teria que tipo de equação?

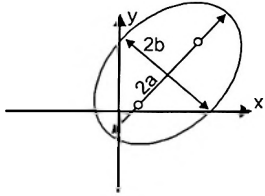


Figura 4.1.2

É justamente isso que vamos aprender a fazer agora!

Para começar este capítulo, vamos demonstrar um teorema bastante importante para o nosso desenvolvimento a seguir.

Uma seção cônica qualquer, em um dado sistema de coordenadas, será sempre representada por uma equação quadrática (também conhecida como **equação geral de uma seção cônica**) do tipo:

$$A \cdot x^2 + B \cdot x \cdot y + C \cdot y^2 + D \cdot x + E \cdot y + F = 0$$

Resultado 4.1.1

Demonstração:

A demonstração é simples e consiste apenas de um desenvolvimento algébrico do 2º Teorema de Dandelin. Vamos relembrá-lo (Resultado 3.1.3).

Para todo ponto P de uma seção cônica de foco F, existirá uma reta d tal que:

$$\frac{\overline{PF}}{\overline{Pd}} = e$$

Representaremos F e d de forma mais genética possível. Seja $F = (x_f, y_f)$ e d de equação: $rx + sy + t = 0$.

Do resultado 3.1.3, segue:

$$\frac{\sqrt{(x-x_f)^2 + (y-y_f)^2}}{\frac{|rx + sy + t|}{\sqrt{r^2 + s^2}}} = e$$

Elevando a equação ao quadrado:

$$(x-x_f)^2 + (y-y_f)^2 = e^2 \cdot \frac{(rx + sy + t)^2}{r^2 + s^2} \qquad \text{(eq. I)}$$

Desta maneira, podemos reescrever a equação (I) como:

$$(x-x_f)^2 + (y-y_f)^2 = e^2 \cdot \frac{(rx + sy + t)^2}{r^2 + s^2}$$

$$= \frac{e^2}{r^2 + s^2} \cdot \left(r^2x^2 + s^2y^2 + 2r \cdot s \cdot x \cdot y + 2r \cdot t \cdot x + 2s \cdot t \cdot y + t^2\right)$$

Desenvolvendo a equação acima, chegamos a:

$$Ax^2 + Bx \cdot y + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad \text{(eq. II)}$$

Onde:

$$A = \frac{\left(1-e^2\right)r^2 + s^2}{r^2 + s^2}, \quad B = -\frac{2e^2 \cdot r \cdot s}{r^2 + s^2}, \quad C = \frac{\left(1-e^2\right)s^2 + r^2}{r^2 + s^2}$$

$$D = -2\left(x_f + \frac{e^2 \cdot r \cdot t}{r^2 + s^2}\right), \quad E = -2\left(y_f + \frac{e^2 \cdot s \cdot t}{r^2 + s^2}\right), \quad F = {x_f}^2 + {y_f}^2 - \frac{e^2t^2}{r^2 + s^2}$$

A equação (II) conclui a prova! □

OBS.:

Por enquanto tudo que sabemos é que dada uma seção cônica e um sistema de eixos coordenados em seu plano, a equação que representa a curva será uma equação quadrática.

Se conseguirmos transformar estas equações quadráticas, por meio de mudanças de variáveis, nas equações canônicas já conhecidas, poderemos reconhecer de qual cônica se trata, e até mesmo extrair as informações geométricas necessárias para traçá-las.

Translação de Eixos

Considere dois sistemas de eixos. Um deles (x'oy') é tal que seja deslocado de x_0 unidades para direita, e y_0 unidades para cima em relação ao outro sistema xoy.

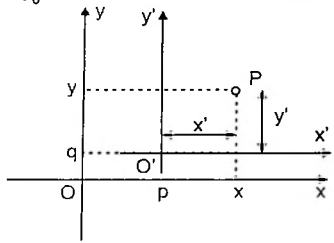


Figura 4.1.3

Da figura acima, temos: $\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases}$

Ou, invertendo: $\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases}$

Nos capítulos anteriores, ao estudarmos as equações de circunferências, elipses, hipérboles e parábolas vimos que o fato de deslocarmos estas figuras geométricas na direção horizontal ou vertical altera a aparência da equação de forma bastante particular (como no exemplo da elipse abaixo).

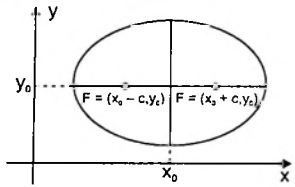


Figura 4.1.4

Consideremos a mudança de variáveis:

$$x' = x - x_0$$
$$y' = y - y_0$$

Agora podemos entender o sentido geométrico desta transformação.

Estamos deslocando os eixos coordenados de tal forma a coincidirem com os eixos canônicos da curva. Nestes novos eixos a equação da curva toma a "aparência" conhecida.

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

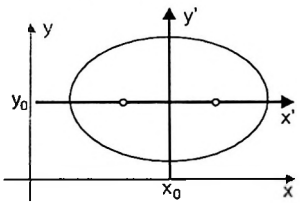


Figura 4.1.5

Translação de Eixos

Sendo (x'oy') um sistema de eixos deslocado de p unidades para a direita e q unidades para cima em relação ao eixo (xoy), as coordenadas de um ponto nos dois sistemas se relacionam de acordo com o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x' = x - p \\ y' = y - q \end{cases}$$

Resultado 4.1.2

Eliminação dos Termos Lineares de uma Quadrática

Das equações da translação de eixos:

$$\begin{cases} x = a + x' \\ y = b + y' \end{cases}$$

Substituindo na equação geral da cônica:

$$A(a+x')^2 + B(a+x')\cdot(b+y') + C(b+y')^2 +$$
$$+ D(a+x') + E(b+y') + F = 0$$

Organizando, obtemos:

$$Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 + x'(2Aa + Bb + D) + y'(2Cb + Ba + E) + \\ + \left(a^2A + b^2C + Bab + Da + Eb + F\right) = 0$$

Repare que podemos escolher a e b de tal modo que os termos em x' e em y' desapareçam. Basta que:

$$\begin{cases} 2Aa + Bb + D = 0 \\ Ba + 2Cb + E = 0 \end{cases}$$

Isto nos permite escrever o seguinte resultado.

Dada uma curva quadrática $A \cdot x^2 + B \cdot x \cdot y + C \cdot y^2 + D \cdot x + E \cdot y + F = 0$ a translação de eixos $(x,y) \rightarrow (x',y')$ tal que a equação resultante não possua os termos lineares em x e y será da forma:

$$\begin{cases} x = a + x' \\ y = b + y' \end{cases}$$

Onde a, b são determinados resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} 2A \cdot a + B \cdot b + D = 0 \\ B \cdot a + 2C \cdot b + E = 0 \end{cases}$$

Resultado 4.1.3

Exemplo 4.1.a Encontre o sistema de eixos tal que a equação abaixo, quando representada no novo sistema, não possua termos lineares em x e y.

$$3x^2 + 8xy + y^2 + 6x + 2y + 3 = 0$$

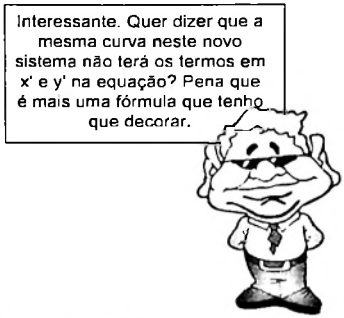
Solução:

Usando o resultado 4.1.3, as constantes da translação de eixos serão encontradas resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} 2 \cdot 3a + 8b + 6 = 0 \\ 8a + 2 \cdot 1b + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a + 4b + 3 = 0 \\ 4a + b + 1 = 0 \end{cases} \therefore \begin{cases} a = -\dfrac{1}{13} \\ b = -\dfrac{9}{13} \end{cases}$$

Logo o novo sistema de eixos que resolverão problema será;

$$\boxed{\begin{cases} x' = x + \dfrac{1}{13} \\ y' = y + \dfrac{9}{13} \end{cases}}$$



OBS.:

Felizmente, neste casos não precisa decorar a fórmula! Um métodomnemônico nos ajudará a lembrar este resultado de maneira simples.Observemos o sistema que determina as constantes de translação queeliminarão os termos lineares:

$$\begin{cases} 2A\cdot a + B\cdot b + D = 0 \\ B\cdot a + 2C\cdot b + E = 0 \end{cases}$$

Note que a primeira equação é exatamente igual à derivada da equação geralem relação a x (considerando y constante), aplicada no ponto (a,b). Asegunda é igual à derivada da equação geral em relação a y (considerando xconstante).

No exemplo anterior:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2 + 8xy + y^2 + 6x + 2y + 3\right)\Big|_{(a,b)} = 6a + 8b + 6 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2 + 8xy + y^2 + 6x + 2y + 3\right)\Big|_{(a,b)} = 8a + 2b + 2 = 0$$

Vale ressaltar que este é apenas um método mnemônico! Trata-sesimplesmente de uma maneira mais fácil de lembrar o sistema de eixos queeliminará os termos lineares!

Da demonstração do resultado anterior cabe ainda ressaltar alguns outros detalhes!

Da translação de eixos $\begin{cases} x' = x - a \\ y' = y - b \end{cases}$ resulta:

$$Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 + x'(2Aa + Bb + D) + y'(2Cb + Ba + E) + \\ + \left(a^2A + b^2B + Bab + Da + Eb + F\right) = 0$$

Podemos dizer que a translação de eixos transforma uma equação quadrática $A{\cdot}x^2 + B{\cdot}x{\cdot}y + C{\cdot}y^2 + D{\cdot}x + E{\cdot}y + F = 0$ na seguinte equação:

$$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

Onde $\begin{cases} A' = A \\ B' = B \\ C' = C \end{cases}$; $\begin{cases} D' = 2Aa + Bb + D \\ E' = 2Cb + Ba + E \\ F' = Aa^2 + Bab + Cb^2 + Da + Eb + F \end{cases}$

Uma translação de eixos não altera os termos quadráticos A, B e C da equação geral da seção cônica.

Resultado 4.1.4

Dada a translação de eixos $\begin{cases} x' = x - a \\ y' = y - b \end{cases}$, o termo independente da equação resultante é obtido substituindo o par (a,b) na equação geral da curva:

$$F' = Aa^2 + Bab + Cb^2 + Da + Eb + F$$

Resultado 4.1.5

Exemplo 4.1.b Sem desenvolver a translação, use os resultados que acabamos de ver para encontrar a equação resultante da translação de eixos feita no exemplo 4.1.a.

Solução:

Sabemos que os termos quadráticos não se alterarão, os termos lineares serão anulados e que:

$$F' = 3\left(-\frac{1}{13}\right)^2 + 8\left(-\frac{1}{13}\right)\cdot\left(-\frac{9}{13}\right) + \left(-\frac{9}{13}\right)^2 + 6\cdot\left(-\frac{1}{13}\right) + 2\left(-\frac{9}{13}\right) + 3 = \frac{351}{169}$$

A equação resultante da translação será portanto:

$$\boxed{3x'^2 + 8x'y' + y'^2 + \frac{351}{169} = 0}$$

Em alguns casos, a eliminação do termo linear por meio de translação de eixos não será possível.

Isto ocorrerá quando o sistema do resultado 4.1.3 não tiver solução (ou que sua solução não seja única).

$$\begin{cases} 2A \cdot a + B \cdot b - D = 0 \\ B \cdot a + 2C \cdot b + E = 0 \end{cases}$$

Estes casos ocorrerão quando o determinante principal do sistema for nulo.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2A & B \\ B & 2C \end{vmatrix} = 4AC - B^2$$

Ou seja, se a curva for tal que $B^2 = 4 \cdot A \cdot C$, então será impossível eliminar o termo linear por meio de uma simples translação de eixos.

Exemplo 4.1.c Descubra para quais seções cônicas (elipse, hipérbole ou parábola) não será possível eliminar o termo linear por meio de uma translação de eixos.

Solução:

Lembremos as constantes da curva em função dos parâmetros da reta diretriz $d: rx + sy + t = 0$, foco $F = (x_f, y_f)$ e excentricidade e que definem a cônica.

$$A = \frac{r^2\left(1 - e^2\right) + s^2}{r^2 + s^2}, \quad B = -\frac{2e^2 \cdot r \cdot s}{r^2 + s^2}, \quad C = \frac{r^2 + \left(1 - e^2\right)s^2}{r^2 + s^2}$$

$$D = -2\left(x_f + \frac{e^2 \cdot r \cdot t}{r^2 + s^2}\right), \quad E = -2\left(y_f + \frac{e^2 \cdot s \cdot t}{r^2 + s^2}\right), \quad F = {x_f}^2 + {y_f}^2 - \frac{e^2 \cdot t^2}{r^2 + s^2}$$

E, portanto:

$$4A \cdot C - B^2 = 4\left(\frac{r^2\left(1 - e^2\right) + s^2}{r^2 + s^2}\right) \cdot \left(\frac{s^2\left(1 - e^2\right) + r^2}{r^2 + s^2}\right) - \left(\frac{2e^2 \cdot r \cdot s}{r^2 + s^2}\right)^2$$

Desenvolvendo

$$4A \cdot C - B^2 = 4\left(\frac{r^2\left(1 - e^2\right) + s^2}{r^2 + s^2}\right) \cdot \left(\frac{s^2\left(1 - e^2\right) + r^2}{r^2 + s^2}\right) - \left(\frac{2e^2 \cdot r \cdot s}{r^2 + s^2}\right)^2 =$$

$$= \frac{4}{\left(r^2 + s^2\right)^2} \cdot \left(r^2 \cdot s^2 \cdot \left(1 + \left(1 - e^2\right)^2\right) + \left(1 - e^2\right)\left(r^4 + s^4\right) - e^4 \cdot r^2 \cdot s^2\right) =$$

$$= \frac{4}{\left(r^2 + s^2\right)^2} \cdot \left(1 - e^2\right) \cdot \underbrace{\left(r^4 + 2r^2 \cdot s^2 + s^4\right)}_{>0}$$

Logo:
$$\begin{cases} 4A\cdot C - B^2 = 0 & \Leftrightarrow \quad e = 1 \\ 4A\cdot C - B^2 > 0 & \Leftrightarrow \quad 0 < e < 1 \\ 4A\cdot C - B^2 < 0 & \Leftrightarrow \quad e > 1 \end{cases}$$

Com isso, concluímos que nos casos elipse e hipérbole será possível eliminar o termo linear por meio de uma translação de eixos. Já no caso parábola, isto não será possível! Vale notar que as degenerações de parábolas também não permitirão a eliminação dos termos lineares a partir de uma única translação de eixos.

A partir do resultado do exemplo anterior, escrevemos:

Para uma seção cônica descrita por

$$A\cdot x^2 + B\cdot x\cdot y + C\cdot y^2 + D\cdot x + E\cdot y + F = 0,$$

definimos o **determinante da cônica** como sendo:

$$\Delta_{\text{cônica}} = B^2 - 4A\cdot C$$

Apenas pelo sinal deste determinante descobriremos de qual tipo de seção cônica se trata:

$\Delta_{\text{cônica}} = B^2 - 4A\cdot C < 0$ (tipo elipse)

$\Delta_{\text{cônica}} = B^2 - 4A\cdot C > 0$ (tipo hipérbole)

$\Delta_{\text{cônica}} = B^2 - 4A\cdot C = 0$ (tipo parábola)

Resultado 4.1.6

OBS.: As degenerações de cada tipo estão incluídas nos casos acima. Portanto, o sinal do determinante não nos permite distinguir uma elipse de uma elipse degenerada, por exemplo.

Para facilitar futuras referências, vamos definir **centro** de uma seção cônica.

Dada uma cônica descrita por sua equação geral:

$$A\cdot x^2 + B\cdot x\cdot y + C\cdot y^2 + D\cdot x + E\cdot y + F = 0$$

definimos o **centro da cônica** como sendo o ponto (x,y), solução do sistema:

$$\begin{cases} 2A\cdot a + B\cdot b + D = 0 \\ B\cdot a + 2C\cdot b + E = 0 \end{cases}$$

No caso de seções do tipo parábola, em que não há solução para o sistema acima, dizemos que a curva **não possui centro**.

Definição 4.1.1

Note que, de acordo com esta definição, mesmo as degenerações de elipses e hipérboles possuirão centros (mesmo que não seja geometricamente intuitivo). Vejamos isto no exemplo a seguir.

Exemplo 4.1.d Verifique se é possível eliminar os termos lineares da equação abaixo com uma simples translação de eixos. Caso seja possível, determine a equação resultante da translação.

$$3x^2 + y^2 + 6x + 2y + 5 = 0$$

Solução:

Sabemos que esta curva é do tipo elipse pois:

$$\Delta_{\text{cônica}} = B^2 - 4A \cdot C = 36 - 4 \cdot 3 < 0$$

Logo a curva **possui centro**. O mesmo será a solução do sistema:

$$\begin{cases} 6x + 6 = 0 \\ 2y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{centro} = (-1, -1)$$

Após a translação de eixos, $F' = 3(-1)^2 + (-1)^2 + 6(-1) + 2(-1) + 5 = 1$.

A equação da curva após a translação será $\boxed{3x'^2 + y'^2 + 1 = 0}$.

OBS.: A equação obtida no exemplo anterior mostra que a curva dada representa o conjunto vazio uma vez que não existe reais x' e y' tais que:

$$3x'^2 + y'^2 + 1 = 0$$

Portanto, devemos nos atentar ao fato de que, de acordo com a nossa definição, mesmo as degenerações das seções cônicas podem possuir centro!

Uma boa maneira de não ser pego de surpresa por estas degenerações é analisar a equação da quadrática como uma equação do 2º grau em uma das variáveis (x ou y).

No caso anterior, note que: $3x^2 + 6x + \left(y^2 + 2y + 5\right) = 0$

Resolvendo a equação do segundo grau pelo método de Báskara:

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 12\left(y^2 + 2y + 5\right)}}{6} = \frac{-6 \pm \sqrt{-12(y+1)^2 - 12}}{6}$$

O discriminante será negativo para qualquer valor de y. Portanto, de fato, não há soluções reais para a curva dada!

Vamos citar outros exemplos de degenerações que podem ser "desmascaradas" deste modo:

i) Duas Retas Concorrentes:

Exemplo: $x^2 + xy - 2y^2 + x + 2y = 0$

$$\Rightarrow x^2 + x(y+1) + \left(-2y^2 + 2y\right) = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-(y+1) \pm \sqrt{(y+1)^2 - 4\left(-2y^2 + 2y\right)}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-(y+1) \pm \sqrt{(3y-1)^2}}{2}$$

Logo: $x = -2y$ ou $x = y - 1$, o que representa duas retas concorrentes no R^2. Esta é uma degeneração do tipo hipérbole, pois: $\Delta_{\hat{c}onica} = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) > 0$.

ii) Duas Retas Paralelas:

Exemplo: $y^2 + 6x \cdot y + 9x^2 - 9x - 3y + 2 = 0$

$$\Rightarrow 9x^2 + x(6y - 9) + \left(y^2 - 3y + 2\right) = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-(6y-9) \pm \sqrt{(6y-9)^2 - 36\left(y^2 - 3y + 2\right)}}{18}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-(6y-9) \pm \sqrt{9}}{18} = \frac{-(6y-9) \pm 3}{18}$$

Logo $x = \frac{-y-2}{3}$ ou $x = \frac{-y-1}{3}$, o que representa duas retas paralelas no R^2. Esta é uma degeneração do tipo parábola, pois:

$$\Delta_{\hat{c}onica} = 36 - 4(1 \cdot 9) = 0$$

iii) Um único ponto:

Exemplo:

$$x^2 + 2x + y^2 - 4y + 5 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x + \left(y^2 - 4y + 5\right) = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4y^2 + 16y - 20}}{2} \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{-4(y-2)^2}}{2}$$

A única solução real, neste caso, ocorrerá para $y = 4$, e portanto $(x,y) = (-1,4)$.

Esta degeneração é do tipo elipse, pois: $\Delta_{\text{cônica}} = 0 - 4 < 0$.

Vejamos uma interessante questão do ITA a seguir ajudada por esta precaução contra as "pegadinhas" das degenerações.

Exemplo 4.1.e (ITA 2003) Determine a área do polígono situado no primeiro quadrante que é delimitado pelos eixos coordenados e pelo conjunto:

$$\left\{(x,y) \in R^2 : 3x^2 + 2y^2 + 5x \cdot y - 9x - 8y + 6 = 0\right\}$$

Solução:

O enunciado denuncia que trata-se de uma degeneração ao mencionar que a figura geométrica resultante delimitada pela curva e os eixos coordenados será um polígono. Vamos resolver a equação do 2º grau em x:

$$3x^2 + x(5y - 9) + \left(2y^2 - 8y + 6\right) = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{(9 - 5y) \pm \sqrt{(9 - 5y)^2 - 4 \cdot 3 \cdot \left(2y^2 - 8y + 6\right)}}{6}$$

$$= \frac{(9 - 5y) \pm \sqrt{(y+3)^2}}{6} \quad \Rightarrow x = 2 - \frac{2y}{3} \text{ ou } x = -y + 1$$

A figura resultante mencionada no enunciado é

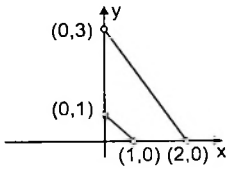


Figura I

A área vale (usando o algoritmo do Exercício 1.30):

$$\text{Area} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}|6-1| = \frac{5}{2} \quad \therefore \quad \boxed{\text{Area} = \frac{5}{2}}$$

Rotação de Eixos

O que será que acontece com as coordenadas de um ponto se rotacionarmos o sistema de eixos de um ângulo θ.

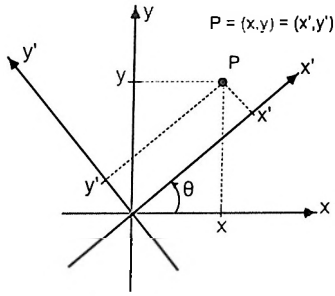


Fig. 4.1.6

Vamos analisar a geometria da seguinte figura:

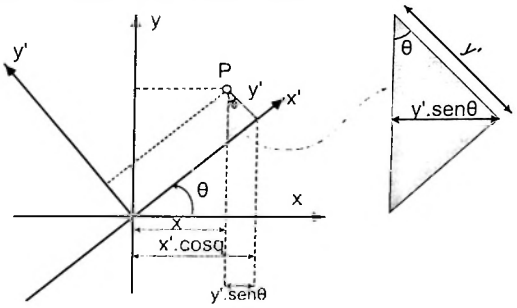


Fig. 4.1.7

Segue da figura 4.1.7 que: $x = x' \cdot \cos\theta - y' \cdot \operatorname{sen}\theta$

Observe ainda que um raciocínio análogo nos dá que:

$$y = x' \cdot \operatorname{sen}\theta + y' \cdot \cos\theta$$

Juntando as duas equações temos a transformaço mais conhecida como rotação de eixos:

$$\begin{cases} x = x' \cdot \cos\theta - y' \cdot \operatorname{sen}\theta \\ y = x' \cdot \operatorname{sen}\theta + y' \cdot \cos\theta \end{cases}$$

Para expressar x e y em função de x' e y' basta inverter o sistema acima:

$$\begin{cases} x' = x \cdot \cos\theta + y \cdot \operatorname{sen}\theta \\ y' = -x \cdot \operatorname{sen}\theta + y \cdot \cos\theta \end{cases}$$

Rotação de Eixos

Sendo (x'oy') um sistema de eixos rotacionados de θ em relação ao eixo (xoy), com a mesma origem, as coordenadas de um ponto nos dois sistemas se relacionam de acordo com o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x' = x \cdot \cos\theta + y \cdot \operatorname{sen}\theta \\ y' = -x \cdot \operatorname{sen}\theta + y \cdot \cos\theta \end{cases}$$

Resultado 4.1.7

OBS.: Existe ainda uma maneira mais simples de se determinar as equações de rotação, usando números complexos.

Rotacionar os eixos de um ângulo θ e escrever as novas coordenadas de um ponto P = (x,y) equivalem a escrever as coordenadas de P' (o vetor rotacionado de –θ) no sistema original. Basta observar a Figura.

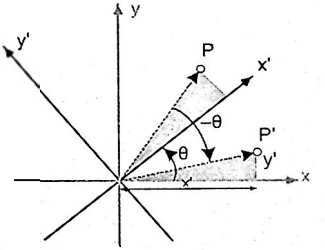


Fig. 4.1.8

$$\overline{OP'} = \overline{OP} \cdot \operatorname{cis}(-\theta) \Rightarrow x' + y' \cdot i = (x + y \cdot i) \cdot (\cos\theta - i \cdot \operatorname{sen}\theta)$$

$$\therefore \begin{cases} x' = x \cdot \cos\theta + y \cdot \operatorname{sen}\theta \\ y' = -x \cdot \operatorname{sen}\theta + y \cdot \cos\theta \end{cases}$$

As equações acima são exatamente as mesmas obtidas geometricamente. Porém, a rapidez nesta demonstração facilita deduzir "na hora da prova" de maneira mais prática.

Se houver dúvidas, consulte o volume 1 desta coleção Matemática em Nível IME/ITA que aborda o assunto de Rotação de Vetores usando Números Complexos.

Eliminação do Termo Retangular de uma Quadrática

Das equações da rotação de eixos, temos:

$$\begin{cases} x = x' \cdot \cos\theta - y' \cdot \operatorname{sen}\theta \\ y = x' \cdot \operatorname{sen}\theta + y' \cdot \cos\theta \end{cases}$$

Vejamos o efeito que uma rotação genérica tem sobre a equação geral da curva.

$$A \cdot x^2 + B \cdot x \cdot y + C \cdot y^2 + D \cdot x + E \cdot y + F = 0$$

$$\Rightarrow A(x' \cdot \cos\theta - y' \cdot \operatorname{sen}\theta)^2 + B(x' \cdot \cos\theta - y' \cdot \operatorname{sen}\theta) \cdot (x' \cdot \operatorname{sen}\theta + y' \cdot \cos\theta) +$$

$$+ C(x' \cdot \operatorname{sen}\theta + y' \cdot \cos\theta)^2 + D(x' \cdot \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta)$$

$$+ E(x' \cdot \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta) + F = 0$$

Organizando, obtemos:

$$\left(A \cdot \cos^2\theta + B \cdot \cos\theta \cdot \operatorname{sen}\theta + C \cdot \operatorname{sen}^2\theta\right) \cdot x'^2 +$$

$$\left(C \cdot \cos^2\theta - B \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta + A \cdot \operatorname{sen}^2\theta\right) \cdot y'^2 +$$

$$\left(2 \cdot C \cdot \cos\theta \cdot \operatorname{sen}\theta - 2 \cdot A \cdot \cos\theta \cdot \operatorname{sen}\theta + B \cdot \cos^2\theta - B \cdot \operatorname{sen}^2\theta\right) \cdot x' \cdot y' +$$

$$(D \cdot \cos\theta + E \cdot \operatorname{sen}\theta) \cdot x' + (E \cdot \cos\theta - D \cdot \operatorname{sen}\theta) \cdot y' + F = 0$$

Se organizarmos na forma $A' \cdot x'^2 + B' \cdot x' \cdot y' + C' \cdot x' \cdot y'^2 + D' \cdot x' + E' \cdot y' + F' = 0$ teremos as seguintes relações:

$$\begin{cases} A' = A \cdot \cos^2\theta + B \cdot \cos\theta \cdot \operatorname{sen}\theta + C \cdot \operatorname{sen}^2\theta \\ B' = 2 \cdot \cos\theta \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot (C - A) + B \cdot \left(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\right) \\ C' = C \cdot \cos^2\theta - B \cdot \cos\theta \cdot \operatorname{sen}\theta + A \cdot \operatorname{sen}^2\theta \\ D' = D \cdot \cos\theta + E \cdot \operatorname{sen}\theta \\ E' = E \cdot \cos\theta - D \cdot \operatorname{sen}\theta \\ F' = F \end{cases}$$

Isto nos permite escrever os seguintes resultados.

Dada uma curva quadrática $A \cdot x^2 + B \cdot x \cdot y + C \cdot y^2 + D \cdot x + E \cdot y + F = 0$ a rotação dos eixos coordenados de um ângulo θ não altera o termo independente F.

Resultado 4.1.8

Demonstração:

Veja o desenvolvimento acima.

O ângulo θ de rotação que eliminará o termo retangular (coeficiente do termo xy) da equação quadrática é tal que:

$$tg(2\theta) = \frac{B}{A-C}, \text{ se } A \neq C$$

Resultado 4.1.9

Demonstração:

Do desenvolvimento acima, o termo retangular será nulo quando:

$$B' = 2\cos\theta \cdot \text{sen}\theta \cdot (C-A) + B\left(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta\right) = 0$$

Usando as expressões de arco dobro, da trigonometria, reescrevemos a equação acima:

$$\text{sen}(2\theta) \cdot (C - A) + B \cdot \cos(2\theta) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad tg(2\theta) = \frac{B}{A - C} \quad \square$$

OBS. 1: Se A = C, o valor de θ que eliminará o termo retangular será tal que:

$$\cos(2\theta) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \theta = \pm\frac{\pi}{4}$$

OBS. 2: Note que a rotação altera os termos lineares da equação, desde que os mesmos existam! Para eliminar ambas as partes lineares e retangular é portanto aconselhável fazer primeiramente a translação de eixos e depois a rotação.

OBS. 3: Do resultado 4.1.9, sempre haverá mais de um ângulo diferente que eliminará o termo retangular. Qualquer um nos servirá! Porém, para mantermos uma convenção, nós escolheremos daqui para frente o menor *ângulo positivo entre eles.*

Exemplo 4.1.f (IME) Determine o lugar geométrico definido pela equação em R:

$$2x^2 - 4x \cdot y + 4y^2 - 2x - 8y + 9 = 0$$

Solução:

Vamos, primeiramente, tentar eliminar os termos lineares. O sistema da translação de eixos que eliminará estes termos será

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} \rightarrow 4x - 4y - 2 = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \rightarrow -4x + 8y - 8 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema encontramos o centro da curva: centro $= \left(3, \frac{5}{2}\right)$.

Esta translação não altera os termos quadráticos. O termo independente após a translação de eixos será:

$$F' = 2(3)^2 - 4(3)\left(\frac{5}{2}\right) + 4\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2(3) - 8\left(\frac{5}{2}\right) + 9 = -4$$

A equação após a translação de eixos será portanto:

$$2x'^2 - 4x'\cdot y' + 4y'^2 - 4 = 0$$

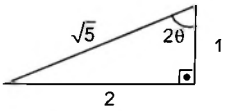
Ou ainda:

$$x'^2 - 2x'\cdot y' + 2y'^2 - 2 = 0$$

Vamos agora, por meio de uma rotação de eixos, eliminar o termo retangular. O ângulo de rotação θ que fará esta eliminação será

$$2\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{B}{A - C}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{-2}{1 - 2}\right) = \operatorname{arctg}(2)$$

Como qualquer ângulo que tenha tangente igual a 2 nos será suficiente, consideremos o triângulo retângulo:



De onde segue que: $\cos(2\theta) = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ e, portanto:

$$\begin{cases} \cos\theta = \sqrt{\dfrac{1 + \cos(2\theta)}{2}} = \sqrt{\dfrac{1 + \frac{\sqrt{5}}{5}}{2}} = \sqrt{\dfrac{5 + \sqrt{5}}{10}} \\ \operatorname{sen}\theta = \sqrt{\dfrac{1 - \cos(2\theta)}{2}} = \sqrt{\dfrac{1 - \frac{\sqrt{5}}{5}}{2}} = \sqrt{\dfrac{5 - \sqrt{5}}{10}} \end{cases}$$

As equações de rotação são:

$$\begin{cases} x' = \sqrt{\dfrac{5 + \sqrt{5}}{10}}\cdot x'' - \sqrt{\dfrac{5 - \sqrt{5}}{10}}\cdot y'' \\ y' = \sqrt{\dfrac{5 - \sqrt{5}}{10}}\cdot x'' + \sqrt{\dfrac{5 + \sqrt{5}}{10}}\cdot y'' \end{cases}$$

Basta então substituirmos as equações de rotação na equação da curva:

$$x'^2 - 2x'\cdot y' + 2y'^2 - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\cdot x'' - \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\cdot y''\right)^2 + 2\left(\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\cdot x'' + \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\cdot y''\right)^2$$

$$-2\left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\cdot x'' - \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\cdot y''\right)\cdot\left(\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\cdot x'' + \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\cdot y''\right) - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\cdot x''^2 - \cancel{2\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}\cdot x''\cdot y''} + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\cdot y''^2\right)$$

$$+ 2\cdot\left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\cdot x''^2 + \cancel{2\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}\cdot x''\cdot y''} + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\cdot y''^2\right) +$$

$$-2\left(\frac{\sqrt{5}}{5}x''^2 + \cancel{\frac{\sqrt{5}}{5}x''\cdot y''} - \frac{\sqrt{5}}{5}y''^2\right) - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)x''^2 + \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)y''^2 - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x''^2}{\left(\frac{4}{3-\sqrt{5}}\right)} + \frac{y''^2}{\left(\frac{4}{3+\sqrt{5}}\right)} = 1$$

Descobrimos, após uma translação e rotação de eixos adequadas, que a equação era de uma elipse com eixos:

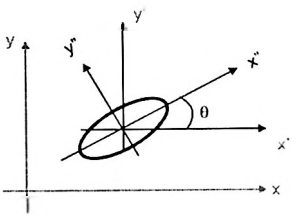
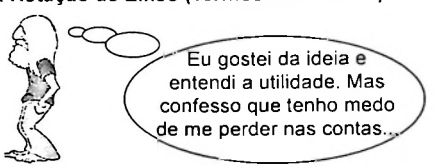


Figura I

Propriedades da Rotação de Eixos (Termos invariantes)



De fato errar em contas em questões como o exemplo anterior não é nada incomum. O procedimento, embora simples, requer uma manipulação algébrica em alguns casos um pouco trabalhosa.

No entanto, veremos que algumas propriedades da rotação de eixos ajudarão a tornar nossa vida muito mais fácil! Vejamos a seguir.

A soma dos termos em x'^2 (isto é, A) e em y'^2 (isto é, C), não sofre alteração após uma rotação:

$$A' + C' = A + C$$

Resultado 4.1.10

Demonstração:

Do desenvolvimento do resultado 4.1.7, lembremos que uma rotação de um ângulo θ qualquer resulta em uma nova equação tal que:

$$\begin{cases} A' = A\cos^2\theta + B\cos\theta\cdot\operatorname{sen}\theta + C\operatorname{sen}^2\theta \\ B' = 2\cos\theta\cdot\operatorname{sen}\theta\cdot(C - A) + B\left(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\right) \\ C' = C\cdot\cos^2\theta - B\cdot\cos\theta\cdot\operatorname{sen}\theta + A\cdot\operatorname{sen}^2\theta \\ D' = D\cdot\cos\theta + E\cdot\operatorname{sen}\theta \\ E' = E\cdot\cos\theta - D\cdot\operatorname{sen}\theta \\ F' = F \end{cases}$$

Logo:

$$\begin{aligned} A' + C' &= \left(A\cdot\cos^2\theta + \cancel{B\cdot\cos\theta\cdot\operatorname{sen}\theta} + C\cdot\operatorname{sen}^2\theta\right) \\ &\quad + \left(C\cdot\cos^2\theta - \cancel{B\cdot\cos\theta\cdot\operatorname{sen}\theta} + A\cdot\operatorname{sen}^2\theta\right) \\ &= A\cdot\underbrace{\left(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta\right)}_{=1} + C\cdot\underbrace{\left(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta\right)}_{=1} = A + C \quad \square \end{aligned}$$

O determinante da cônica não sofre alteração após uma rotação:

$$B'^2 - 4A'\cdot C' = B^2 - 4A\cdot C$$

Resultado 4.1.11

Demonstração:

Usando novamente o resultado de uma rotação qualquer:

$$\begin{cases} A' = A\cdot\cos^2\theta + B\cdot\cos\theta\cdot\operatorname{sen}\theta + C\cdot\operatorname{sen}^2\theta \\ B' = 2\cos\theta\cdot\operatorname{sen}\theta\cdot(C - A) + B\cdot\left(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\right) \\ C' = C\cdot\cos^2\theta - B\cdot\cos\theta\cdot\operatorname{sen}\theta + A\cdot\operatorname{sen}^2\theta \\ D' = D\cdot\cos\theta + E\cdot\operatorname{sen}\theta \\ E' = E\cdot\cos\theta - D\cdot\operatorname{sen}\theta \\ F' = F \end{cases}$$

Temos:

$$B'^2 = \left(2\cos\theta\cdot\operatorname{sen}\theta\cdot(C - A) + B\cdot\left(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\right)\right)^2$$

$$= \left(\operatorname{sen}(2\theta)\cdot(C - A) + B\cdot\cos(2\theta)\right)^2$$

$$= \operatorname{sen}^2(2\theta)\cdot(C - A)^2 + B\cdot(C - A)\cdot\operatorname{sen}(4\theta) + B^2\cdot\cos^2(2\theta) \qquad \text{(Eq. I)}$$

E, também:

$$A'C' = \left(A\cdot\cos^2\theta + C\cdot\operatorname{sen}^2\theta + B\cdot\frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2}\right)\cdot\left(C\cdot\cos^2\theta + A\cdot\operatorname{sen}^2\theta - B\cdot\frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2}\right)$$

Desenvolvendo:

$$= A\cdot C\left(\cos^4\theta + \operatorname{sen}^4\theta\right) + \left(A^2 + C^2\right)\cdot\operatorname{sen}^2\theta\cdot\cos^2\theta +$$

$$+ \frac{AB}{2}\cdot\operatorname{sen}(2\theta)\cdot\left(\operatorname{sen}^2\theta - \cos^2\theta\right) +$$

$$+ \frac{BC}{2}\cdot\operatorname{sen}(2\theta)\cdot\left(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\right) - \frac{B^2}{4}\cdot\operatorname{sen}^2(2\theta)$$

$$= A\cdot C\left(\left(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta\right)^2 - 2\operatorname{sen}^2\theta\cdot\cos^2\theta\right) + \left(A^2 + C^2\right)\cdot\operatorname{sen}^2\theta\cdot\cos^2\theta$$

$$-\frac{A\cdot B}{2}\cdot\operatorname{sen}(2\theta)\cdot\cos(2\theta) + \frac{B\cdot C}{2}\cdot\operatorname{sen}(2\theta)\cdot\cos(2\theta) - \frac{B^2}{4}\cdot\operatorname{sen}^2(2\theta)$$

$$= A\cdot C\cdot\left(1 - 2\operatorname{sen}^2\theta\cdot\cos^2\theta\right) + \left(A^2 + C^2\right)\cdot\operatorname{sen}^2\theta\cdot\cos^2\theta +$$

$$\frac{\operatorname{sen}(4\theta)}{4}\cdot(B\cdot C - A\cdot B) - \frac{B^2}{4}\cdot\operatorname{sen}^2(2\theta)$$

$$= \operatorname{sen}^2\theta\cdot\cos^2\theta\cdot\left(A^2 + C^2 - 2A\cdot C\right) + A\cdot C +$$

$$+ \frac{\operatorname{sen}(4\cdot\theta)}{4}\cdot(B\cdot C - A\cdot B) - \frac{B^2}{4}\cdot\operatorname{sen}^2(2\theta)$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2(2\theta)}{4}\cdot(A - C)^2 + A\cdot C + \frac{\operatorname{sen}(4\theta)}{4}\cdot(B\cdot C - A\cdot B) - \frac{B^2}{4}\cdot\operatorname{sen}^2(2\theta) \qquad \text{(Eq. II)}$$

Finalmente, de (I) e (II):

$$B'^2 - 4A'\cdot C' =$$

$$= \cancel{\operatorname{sen}^2(2\theta)\cdot(C-A)^2} + B(C-A)\cdot\operatorname{sen}(4\cdot\theta) + B^2\cdot\cos^2(2\theta)$$

$$-4\cdot\left(\cancel{\frac{\operatorname{sen}^2(2\theta)}{4}\cdot(A-C)^2} + A\cdot C + \frac{\operatorname{sen}(4\theta)}{4}\cdot(B\cdot C - A\cdot B) - \frac{B^2}{4}\cdot\operatorname{sen}^2(2\theta)\right) =$$

$$= \underbrace{+\operatorname{sen}(4\theta)\cdot(B\cdot C - A\cdot B - B\cdot C + A\cdot B)}_{=0} + B^2\underbrace{\left(\cos^2(2\theta) + \operatorname{sen}^2(2\theta)\right)}_{=1} - 4A\cdot C$$

$$= B^2 - 4A\cdot C$$

Logo: $B'^2 - 4A'\cdot C' = B^2 - 4A\cdot C$ □

Sabemos que, após uma rotação, os termos a seguir são invariantes:

$$\begin{cases} A' + C' = A + C \\ B'^2 - 4A'\cdot C' = B^2 - 4A\cdot C \end{cases}$$

Se desejamos eliminar o termo retangular B, teremos que:

$$\begin{cases} A' + C' = A + C \\ A'\cdot C' = \dfrac{B^2 - 4A\cdot C}{-4} \end{cases}$$

Como a equação antes da rotação é conhecida, A, B e C são conhecidos. As equações acima nos mostram que os valores de A' e C' da equação após aplicada a rotação que elimina o termo retangular também são conhecidos. Como conhecemos a soma A' + C', e o produto A'.C', teremos que A' e C' serão as raízes do polinômio:

$$k^2 - (A' + C')\cdot k + (A'\cdot C') = 0$$

Ora, se a equação já não possuir termos lineares (basta aplicar anteriormente uma translação de eixos adequadas) nem termo retangular, e sabendo que o termo independente não é alterado, a equação resultante é obtida de maneira incrivelmente simples!

Para resumir o que acabamos de discutir, vejamos o exemplo a seguir:

Exemplo 4.1.g Resolva novamente o exemplo 4.1.f e identifique o lugar geométrico descrito pela curva abaixo usando os termos invariantes de uma rotação de eixos.

$$2x^2 - 4x \cdot y + 4y^2 - 2x - 8y + 9 = 0$$

Solução:

Comecemos eliminando os termos lineares da mesma forma feita no exemplo 4.1.f. Chegamos, portanto à seguinte equação:

$$x^2 - 2x \cdot y + 2y^2 - 2 = 0$$

Dos termos invariantes de uma rotação, sabe-se:

$$\begin{cases} A' + C' = A + C = 1 + 2 = 3 \\ B'^2 - 4A' \cdot C' = B^2 - 4A \cdot C = 4 - 4 \cdot 2 = -4 \end{cases}$$

Como desejamos obter a rotação que elimina o termo B', teremos:

$$\begin{cases} A' + C' = 3 \\ A' \cdot C' = 1 \end{cases}$$

A' e C' serão, portanto, raízes da equação do 2º grau:

$$k^2 - 3k + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A' = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2} \\ C' = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Portanto, a equação resultante será

$$\left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right) \cdot x'^2 + \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right) \cdot y'^2 - 2 = 0$$

Que é a mesma equação encontrada no exemplo anterior!

OBS. 1: No exemplo anterior, ao resolvermos a equação do segundo grau para A' e C', poderíamos ter tomado

$$\begin{cases} A' = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2} \\ C' = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Isto mudaria a equação, de fato. Simplesmente, o que está sendo feito é uma rotação no sentido contrário, que também adequará os eixos aos eixos da elipse.

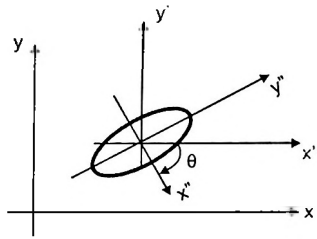


Fig I

OBS. 2: Se a curva for do tipo parábola, vimos que ela não possuirá centro. Consequentemente não conseguiremos eliminar os termos lineares com uma simples translação de eixos.

Quando a rotação for aplicada, estes termos lineares serão alterados. Sugerimos que nestes casos,o método usado no exemplo 4.1.f seja utilizado!

OBS. 3: Resumo da Simplificação de uma Equação Geral de uma Cônica

Passo 1:

Para evitar de cairmos em degenerações, tenta-se resolver a equação do 2º grau em x ou em y. Se não obtivermos sucesso, passamos ao passo seguinte.

Passo 2:

A curva não é uma degeneração. Procuramos então saber se ela possui centro utilizando as equações da translação de eixos:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} \rightarrow 2A \cdot x + B \cdot y + D = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \rightarrow B \cdot x + 2C \cdot y + E = 0 \end{cases}$$

Passo 3:

Se o sistema não possuir solução, a curva não possui centro. Logo, trata-se de uma parábola. Neste caso, a única alternativa é determinar o ângulo adequado para a rotação que eliminará o termo retangular. Para isso, usamos que:

$$2\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{B}{A - C}\right)$$

Tendo obtido o valor de θ, aplica-se as equações de rotação para determinar a equação resultante:

$$\begin{cases} x = x' \cdot \cos\theta - y' \cdot \operatorname{sen}\theta \\ y = x' \cdot \operatorname{sen}\theta + y' \cdot \cos\theta \end{cases}$$

Lembre-se do método dos números complexos para ajudar a decorar estas equações!

Passo 4:

Caso a curva possua centro (a,b), calculamos o termo independente pós-translação da seguinte maneira:

$$F' = A \cdot a^2 + B \cdot a \cdot b + C \cdot b^2 + D \cdot a + E \cdot b + F$$

Passo 5:

Usamos os termos invariantes de uma rotação para determinarmos A' e C':

$$\begin{cases} A' + C' = A + C \\ A' \cdot C' = \dfrac{B^2 - 4A \cdot C}{-4} \end{cases}$$

Passo 6:

Tendo em mãos A', C' e F', a equação resultante será:

$$A' \cdot x^2 + C' \cdot y^2 + F' = 0$$

Voilà!

4.2. Retas Tangentes

O seguinte resultado foi visto individualmente para as seções cônicas em suas formas canônicas. Vamos demonstrar o caso geral.

Sugerimos que o leitor releia o que foi feito nos casos anteriores, pois a demonstração neste caso é rigorosamente análoga. Para facilitar as contas, optaremos desta vez, pela solução usando cálculo diferencial.

Considere a curva a seguir o ponto $P = (x_0, y_0)$.

$$A \cdot x^2 + B \cdot x \cdot y + C \cdot y^2 + D \cdot x + E \cdot y + F = 0$$

A equação da reta tangente é curva no ponto P é dada por:

$$A(x_0 \cdot x) + B\left(\frac{y_0 \cdot x + x_0 \cdot y}{2}\right) + C(y_0 \cdot y) + D\frac{(x + x_0)}{2} + E\frac{(y + y_0)}{2} + F = 0$$

Resultado 4.2.1

Demonstração: Sabendo que na equação geral da curva, y pode ser descrito como uma função de x, derivamos a equação dos dois lados com respeito à variável x:

$$A \cdot x^2 + B \cdot x \cdot y + C \cdot y^2 + D \cdot x + E \cdot y + F = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(A \cdot x^2 + B \cdot x \cdot y + C \cdot y^2 + D \cdot x + E \cdot y + F\right) = 0$$

$$\Rightarrow 2A \cdot x + B \cdot y + B \cdot x \cdot y' + 2C \cdot y \cdot y' + D + E \cdot y' = 0$$

$$\Rightarrow y' \cdot (B \cdot x + 2C \cdot y + E) = -(2A \cdot x + B \cdot y + D)$$

$$\Rightarrow y' = -\left(\frac{2A \cdot x + B \cdot y + D}{B \cdot x + 2C \cdot y + E}\right)$$

Substituindo (x,y) pelas coordenadas (x_0, y_0) de P conheceremos a inclinação a reta tangente à curva y = y(x).

Tal inclinação é justamente o coeficiente angular m da reta que buscamos.

$$m = -\left(\frac{2A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + D}{B \cdot x_0 + 2C \cdot y_0 + E}\right).$$

A equação da reta será portanto:

$$y - y_0 = -\left(\frac{2A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + D}{B \cdot x_0 + 2C \cdot y_0 + E}\right) \cdot (x - x_0)$$

Desenvolvendo:

$$\Rightarrow (B \cdot x_0 + 2C \cdot y_0 + E) \cdot (y - y_0) = -(2A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + D) \cdot (x - x_0)$$

$$\Rightarrow B \cdot x_0 \cdot y - B \cdot x_0 \cdot y_0 + 2C \cdot y_0 \cdot y - 2C \cdot y_0^2 + E \cdot y - E \cdot y_0 =$$

$$= -2A \cdot x \cdot x_0 + 2A \cdot x_0^2 - B \cdot y_0 \cdot x + B \cdot y_0 \cdot x_0 - D \cdot x + D \cdot x_0$$

$$\Rightarrow 2A \cdot x_0 \cdot x + B \cdot y_0 \cdot x + D \cdot x + 2C \cdot y_0 \cdot y + B \cdot x_0 \cdot y + E \cdot y + D \cdot x_0 + E \cdot y_0 =$$

$$= \overbrace{\left(2A\cdot x_o^2 + 2B\cdot y_o\cdot x_o + 2C\cdot y_o^2 + 2D\cdot x_o + 2E\cdot y_o\right)}^{=-2F}$$

$$\Rightarrow -2F = 2A(x_0\cdot x) + B(y_o\cdot x + x_o\cdot y) + 2C(y_o\cdot y) + \\ + D(x+x_o) + E(y+y_o)$$

$$\Rightarrow^{+2} A(x_o - x) + B\left(\frac{y_o\cdot x + x_o\cdot y}{2}\right) + C\cdot(y_o\cdot y) + \\ + D\cdot\frac{(x + x_o)}{2} + E\cdot\frac{(y + y_o)}{2} + F = 0$$

OBS.: O resultado que acabamos de mostrar é o mais geral possível! Dada uma curva quadrática qualquer, podemos encontrar a equação da reta tangente a ela no ponto (x_0, y_0) da seguinte maneira.

Olhando para a equação da curva, substituir:

$$x^2 \quad \text{por} \quad x_o\cdot x$$

$$y^2 \quad \text{por} \quad y_o\cdot y$$

$$x\cdot y \quad \text{por} \quad \frac{x_o\cdot y + y_o\cdot x}{2}$$

$$x \quad \text{por} \quad \frac{x_o + x}{2}$$

$$y \quad \text{por} \quad \frac{y_o + y}{2}$$

Por exemplo, no caso da elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, a equação da reta tangente será:

$$\frac{x\cdot x_o}{a^2} + \frac{y\cdot y_o}{b^2} = 1$$

Justamente o que encontramos na seção 3.2 do capítulo 3. Muito interessante, não?

Exemplo 4.2.a Determinar a equação da reta tangente no ponto (1,1) pertencente à curva: $x^2 - 3y^2 + 2x\cdot y + 3x - 3 = 0$

Solução:

Usando o resultado 4.2.1, a equação da reta tangente no ponto (1,1) será:

$$x\cdot 1 - 3y\cdot 1 + 2\left(\frac{x\cdot 1 + y\cdot 1}{2}\right) + 3\left(\frac{x+1}{2}\right) - 3 = 0$$

Arrumando: $\boxed{7x - 4y - 3 = 0}$

Parece até mágica, não é mesmo?

4.3. Diâmetros de Cônicas

O diâmetro de uma cônica é o lugar geométrico dos pontos médios das cordas paralelas a uma dada direção.

Definição 4.3.1

Vamos iniciar esta seção com um exemplo de uma questão cobrada na Olimpíada Brasileira Universitária de 2006. As ferramentas que temos até o momento já permitem resolvê-la sem problemas. Sugerimos que o leitor acompanhe a solução para darmos início ao conteúdo desta seção.

Exemplo 4.3.a (OBM-U 2006 adaptada) Dada uma hipérbole e uma reta, não vertical e não paralela às assintotas, determine a equação lugar geométrico dos pontos médios das cordas da hipérbole paralelas à reta dada. **Obs:** Uma corda de uma hipérbole é um segmento cujos extremos pertencem à hipérbole.

Solução:

De acordo com a definição 4.3.1 o enunciado pede justamente a equação do diâmetro de uma hipérbole relativas a uma direção não paralela às assintotas. Até o momento não sabemos que tipo de curva este L.G. representa.

Vamos considerar a hipérbole na sua forma:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Seja uma reta (não-vertical) que atenda ao enunciado: $y = m \cdot x + h$, $m \neq \pm \frac{b}{a}$

Os pontos de interseção serão as soluções do sistema:

$$\begin{cases} b^2 \cdot x^2 - a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2 \\ y = m \cdot x + h \end{cases}$$

$$\Rightarrow b^2 \cdot x^2 - a^2 \cdot (m^2 \cdot x^2 + 2m \cdot h \cdot x + h^2) = a^2 \cdot b^2$$

$$\Rightarrow (b^2 - a^2 \cdot m^2) \cdot x^2 - 2m \cdot h \cdot a^2 \cdot x - a^2 \cdot (h^2 + b^2) = 0$$

Sendo $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ os dois pontos de interseção da reta com a parábola, teremos que o pontos médio da corda definida por estes dois pontos será:

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\text{soma das raizes}}{2} = \frac{2\,m \cdot h \cdot a^2}{2\left(b^2 - a^2 \cdot m^2\right)} = \frac{m \cdot h \cdot a^2}{b^2 - a^2 \cdot m^2}$$

As ordenadas de P_1 e P_2 são:

$$y_m = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{m \cdot x_1 + m \cdot x_2 + 2h}{2} = m \cdot x_m + h$$

De modo que podemos escrever:
$$\begin{cases} x_m = \dfrac{m \cdot h \cdot a^2}{b^2 - a^2 \cdot m^2} \\ y_m = \dfrac{h \cdot b^2}{b^2 - a^2 \cdot m^2} \end{cases}$$

Dividindo as equações:

$$\frac{x_m}{y_m} = \frac{m \cdot a^2}{b^2} \Rightarrow \boxed{y_m = \left(\frac{b^2}{m \cdot a^2}\right) \cdot x_m}$$

O lugar geométrico pedido é, portanto, uma reta, que passa pelo centro da hipérbole e tem coeficiente angular igual a $\dfrac{b^2}{m \cdot a^2}$

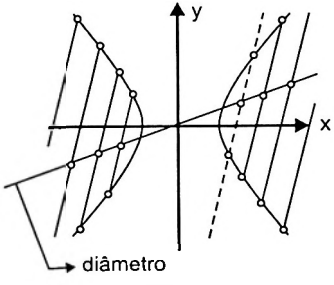


Figura I

Neste caso deve-se tomar cuidado apenas de excluir do LG pedido a parte do diâmetro da hipérbole que se encontra entre os ramos da hipérbole.

O resultado do exemplo 4.3.a nos diz que o diâmetro da hipérbole é uma reta que passa pelo seu centro. O resultado, no entanto, é mais geral que isto. Vejamos.

Teorema dos Diâmetros das Cônicas

Considere uma cônica de equação:

$$A \cdot x^2 + B \cdot x \cdot y + C \cdot y^2 + D \cdot x + E \cdot y + F = 0$$

O diâmetro desta cônica relativo a qualquer direção será uma reta.

Resultado 4.3.1

Demonstração:

Considere uma direção dada pela reta de equação paramétrica:

$$\begin{cases} x = x_m + p \cdot t \\ y = y_m + q \cdot t \end{cases}$$

onde (x_m, y_m) é um ponto do diâmetro e o vetor (p, q) determina a direção dada.

Os pontos de interseção desta reta com a cônica serão as soluções do sistema:

$$\begin{cases} A \cdot x^2 + B \cdot x \cdot y + C \cdot y^2 + D \cdot x + E \cdot y + F = 0 \\ \begin{cases} x = x_m + p \cdot t \\ y = y_m + q \cdot t \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow A\left({x_m}^2 + 2p \cdot t \cdot x_m + p^2 \cdot t^2\right) + B\left(x_m \cdot y_m + t \cdot (x_m \cdot q + y_m \cdot p) + p \cdot q \cdot t^2\right) +$$

$$+ C\left({y_m}^2 + 2y_m \cdot q \cdot t + q^2 \cdot t^2\right) + D(x_m + p \cdot t) + E(y_m + q \cdot t) + F = 0$$

$$\Rightarrow \left(A \cdot p^2 + B \cdot p \cdot q + C \cdot q^2\right) \cdot t^2 +$$

$$+ \left(A \cdot 2p \cdot x_m + B \cdot (q \cdot x_m + p \cdot y_m) + C \cdot 2q \cdot y_m + D \cdot p + E \cdot q\right) \cdot t +$$

$$+ \left(A \cdot {x_m}^2 + B \cdot x_m \cdot y_m + C \cdot {y_m}^2 + D \cdot x_m + E \cdot y_m + F\right) = 0 \qquad \text{(Eq. I)}$$

A equação I, do 2º grau, terá duas soluções t_1 e t_2. Sendo $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ os dois pontos de interseção teremos que o ponto médio da corda definida por estes dois pontos será:

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{(x_m + p \cdot t_1) + (x_m + p \cdot t_2)}{2} = x_m + \frac{p}{2}(t_1 + t_2)$$

Logo:

$$x_m = x_m + \frac{p}{2}(t_1 + t_2) \quad \Rightarrow \quad t_1 + t_2 = 0$$

A soma das raízes da equação I é portanto, nula.

$$\Rightarrow \quad -\frac{\left(A\cdot 2p\cdot x_m + B\cdot(q\cdot x_m + p\cdot y_m) + C\cdot 2q\cdot y_m + D\cdot p + E\cdot q\right)}{2\left(A\cdot p^2 + B\cdot p\cdot q + C\cdot q^2\right)} = 0$$

$$\Rightarrow \quad A\cdot p\cdot x_m + \frac{B}{2}(q\cdot x_m + p\cdot y_m) + C\cdot q\cdot y_m + \frac{D}{2}\cdot p + \frac{E}{2}\cdot q = 0$$

Já percebemos que o lugar geométrico chamado diâmetro de uma cônica é representado por uma equação de reta. Vamos organizá-la mais um pouco.

$$A\cdot x_m + \frac{B}{2}\cdot\left(\left(\frac{q}{p}\right)\cdot x_m + y_m\right) + C\cdot\left(\frac{q}{p}\right)\cdot y_m + \frac{D}{2} + \frac{E}{2}\left(\frac{q}{p}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(A\cdot x_m + \frac{B}{2}\cdot y_m + \frac{D}{2}\right) + \left(\frac{q}{p}\right)\cdot\left(\frac{B}{2}\cdot x_m + C\cdot y_m + \frac{E}{2}\right) = 0$$

Note que q/p é justamente o coeficiente angular m da direção dada. De modo que a equação da reta do diâmetro da cônica será:

$$\boxed{\left(A\cdot x_m + \frac{B}{2}\cdot y_m + \frac{D}{2}\right) + \left(\frac{q}{p}\right)\cdot\left(\frac{B}{2}\cdot x_m + C\cdot y_m + \frac{E}{2}\right) = 0}$$

Resultado 4.3.2 – Equação do Diâmetro de uma Cônica

Exemplo 4.3.b Mostre que se a curva for uma hipérbole ou uma elipse, o diâmetro da curva passará sempre pelo seu centro.

Solução:

Na seção 4.1 vimos que o centro da cônica, se houver, será dado pela solução do sistema:

$$\begin{cases} 2A\cdot x + B\cdot y + D = 0 \\ B\cdot x + 2C\cdot y + E = 0 \end{cases}$$

Dividindo as duas equações por 2, sendo (x_0, y_0) o centro da cônica:

$$\begin{cases} A\cdot x_0 + \frac{B}{2}\cdot y_0 + \frac{D}{2} = 0 \\ \frac{B}{2}\cdot x_0 + C\cdot y_0 + \frac{E}{2} = 0 \end{cases}$$

O ponto (x_0, y_0) estará contido na reta do diâmetro pois:

$$\left(A\cdot x_0 + \frac{B}{2}\cdot y_0 + \frac{D}{2}\right) + m\left(\frac{B}{2}\cdot x_0 + C\cdot y_0 + \frac{E}{2}\right) = 0 + m\cdot 0 = 0 \ \square$$

Aplicando resultado 4.3.2 teremos as equações dos diâmetros relativos a uma direção de coeficiente angular m para as 3 cônicas nas formas canônicas:

1. Diâmetro da Elipse $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right)$

$$\frac{x}{a^2} + m\cdot\left(\frac{y}{b^2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = -\frac{b^2\cdot x}{a^2\cdot m}}$$

2. Diâmetro da Hipérbole $\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\right)$

$$\frac{x}{a^2} - m\cdot\left(\frac{y}{b^2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = \frac{b^2\cdot x}{a^2\cdot m}}$$

3. Diâmetro da Parábola $\left(y^2 = 2p\cdot x\right)$

$$-p + m\cdot(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = \frac{p}{m}}$$

A equação do diâmetro de uma cônica na forma canônica com foco(s) sobre o eixo x é

$$y = \begin{cases} -\left(\frac{b^2}{a^2\cdot m}\right)\cdot x \text{ , elipse} \\ +\left(\frac{b^2}{a^2\cdot m}\right)\cdot x \text{ , hipérbole} \\ \left(\frac{p}{m}\right) \text{ , parábola} \end{cases}$$

Resultado 4.3.3

Note que o diâmetro de uma elipse, por exemplo, relativo a uma direção m tem equação:

$$y = -\left(\frac{b^2}{a^2\cdot m}\right)\cdot x$$

Esta reta determina uma direção de coeficiente angular: $m' = -\frac{b^2}{a^2\cdot m}$

Ora, mas as cordas paralelas a esta direção nova direção também definirão um outro diâmetro da elipse, dando margem a uma importante definição:

O LG dos pontos médios das cordas paralelas a um diâmetro de uma elipse (ou hipérbole) também será diâmetro da elipse (ou hipérbole). Chamaremos estes dois diâmetros de **diâmetros conjugados**

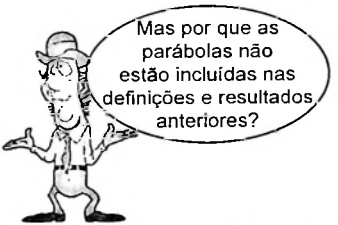
Definição 4.3.4

De forma simples, demonstra-se o seguinte resultado. Deixamos a demonstração como **exercício** ao leitor.

Sendo m_1 e m_2 os coeficientes angulares de dois diâmetros conjugados, então:

$$m_1 \cdot m_2 = \begin{cases} -\dfrac{b^2}{a^2} & \text{(elipse)} \\ +\dfrac{b^2}{a^2} & \text{(hipérbole)} \end{cases}$$

Resultado 4.3.4



OBS.: A parábola foi excluída da definição de **diâmetros conjugados** pois de acordo com o resultado 4.3.3, um diâmetro de uma parábola será sempre paralelo ao seu eixo principal. As retas paralelas a um diâmetro, portanto, não definirão cordas na parábola.

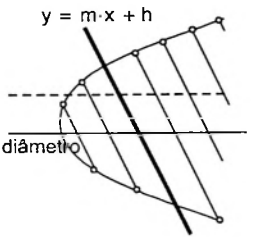


Fig. 4.3.1

4.4. Exercícios de Fixação

OBS.: Nesta seção apresentamos exercícios relativos ao capítulo 4 e também exercícios interessantes que possam requerer todo o conteúdo visto neste livro até o momento.

Exercício 4.1 Determinar e traçar os lugares geométricos definidos pelas equações no plano:

a) $x^2 + 6x \cdot y - y^2 = -4$

b) $3x^2 + 2x \cdot y + 3y^2 = 4$

c) $2y^2 - 2x^2 - 3x \cdot y + 2y + x = 0$

d) $4x^2 + 4x \cdot y + y^2 + 6x + 3y = 0$

e) $x \cdot y = 2$

f) $y^2 + 2x \cdot y + x = 1$

g) $x^2 + 2x \cdot y + y^2 - 2x + 2y = 0$

Exercício 4.2 Dê o gênero da cônica a seguir (tipo elipse, hipérbole ou parábola) e determine o ângulo de rotação pura que elimina o termo retangular $x \cdot y$ das seguintes equações.

a) $x^2 + 6x \cdot y - 7y^2 + 10x - 30y + 23 = 0$

b) $5x^2 + 6x \cdot y + 5y^2 - 4x + 4y - 4 = 0$

c) $x^2 + 4x \cdot y + y^2 = 4$

Exercício 4.3 (ITA – 1995) Uma reta t do plano cartesiano xOy tem coeficiente angular 2a e tangência a parábola $y = x^2 - 1$ no ponto de coordenadas (a, b). Se (c, 0) e (0, d) são as coordenadas de dois pontos de t tais que $c > 0$ e $c = -2d$, então determine a/b.

Exercício 4.4 Calcule o ponto de tangência da reta $x - 2y = 2$ com a curva de seção cônica $x^2 - 4x \cdot y - y^2 + 2x - 4y - 8 = 0$.

Exercício 4.5 (IME - 2007) Assinale a opção correspondente ao número de possíveis valores de α pertencendo a $[0,2\pi)$ tais que o lugar geométrico representado pela equação $3x^2 + 4y^2 - 16y - 12x + tg\alpha + 27 = 0$ seja um único ponto.

Exercício 4.6 Determine a equação da reta secante à cônica de equação $x^2 - 3x \cdot y - 2y^2 - x - 2y - 1 = 0$, que divide ao meio as cordas de coeficiente angular igual a 3.

Exercício 4.7 Considere a parábola de equação $y^2 = 2p \cdot x$. Seja P um ponto acima da parábola, com coordenadas (p/2, t). O parâmetro t é um número real maior que p. Calcule a tangente ângulo agudo entre as retas tangentes à parábola passando por P.

Exercício 4.8 Mostre que a tangente a uma elipse passando por um extremo de um de seus diâmetros é paralela ao diâmetro conjugado.

Exercício 4.9 Seja a família de parábolas $x^2 = 4k \cdot (y + k)$ onde k pertencente aos reais não nulos. Mostre que:

a) Todas as parábolas da família são homofocais.
b) Existem exatamente duas parábolas da família passando pelo ponto P(a,b) com a não nulo.
c) Se $k_1 \cdot k_2 < 0$, então o par de parábolas associadas a estes números se interceptam sob ângulo reto.

Exercício 4.10 Determine o lugar geométrico dos pontos do plano dos quais se podem traçar tangentes à elipse $x^2 + 2y^2 = 4$ paralelas a dois diâmetros conjugados da cônica.

Sugestão: Use o resultado 4.3.3

Exercício 4.11 Determine o lugar geométrico dos pontos médios das cordas que ligam os pontos de contato das tangentes à elipse $x^2 + 2y^2 = 4$ paralelas a dois diâmetros conjugados.

Sugestão: Use o resultado da questão anterior.

Exercício 4.12 ✓ (ITA – 2005) Determine todos os valores reais de a para os quais a equação: $(x-1)^2 = |x-a|$ admita exatamente três soluções reais distintas.

Exercício 4.13 (IME - 2008) Um triângulo isósceles possui seus vértices da base sobre o eixo das abscissas e o terceiro vértice, B, sobre o eixo positivo das ordenadas. Sabe-se que a base mede b e seu ângulo oposto B = 120°. Considere o lugar geométrico dos pontos cujo quadrado da distância à reta suporte da base do triângulo é igual ao produto das distâncias às outras duas retas que suportam os dois outros lados. Determine a(s) equação(ões) dos lugares geométricos e identifique a(s) curva(s) descrita(s).

Exercício 4.14 Dado o sistema: $xy = k$, $x^2 + y^2 = 5$, determine k de tal forma que o sistema possua apenas 2 soluções.

Exercício 4.15 Mostre que as tangentes a uma elipse nos pontos extremos de uma corda paralela a um de seus diâmetros d se encontram em um ponto pertencente ao diâmetro conjugado de d.

Exercício 4.16 **(2º Teorema de Apolônio)** Considere uma elipse de centro O. Sendo P e Q extremos de diâmetros conjugados desta elipse, mostre que

$$\overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2 = a^2 + b^2.$$

Exercício 4.17 **(3º Teorema de Apolônio)** Considere o paralelogramo formado pelas tangentes paralelas a um par de diâmetros conjugados de uma dada elipse de semi-eixos a e b. Mostre que a área deste paralelogramo vale $4 \cdot a \cdot b$.

Exercício 4.18 Uma reta r passa pelo ponto fixo P(–1,–3) e intercepta a reta s: $3 \cdot x + 2 \cdot y - 6 = 0$ no ponto A e a reta t: $y - 3 = 0$ no ponto B. Determinar a equação do lugar geométrico do ponto médio do segmento retilíneo AB à medida que a reta r gira em torno de P. Traçar o gráfico da curva.

Exercício 4.19 A equação do eixo das coordenadas, $y = 0$, é uma degeneração de que tipo de seção cônica?

Exercício 4.20 Discuta em função do parâmetro real a quantas soluções reais existem para a equação:

$$2x + a = \sqrt{1 - x^2}$$

Exercício 4.21 Discuta em função do parâmetro real a quantas soluções reais existem para a equação:

$$\sqrt{1 - x^2} = a \cdot x + 1$$

Exercício 4.22 Discuta em função do parâmetro real a quantas soluções reais existem para a equação:

$$2 - \frac{1}{a} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} = x$$

APÊNDICE

Apresentaremos aqui alguns resultados importantes mencionados no decorrer do livro. Por fugir do objetivo do livro, a maior parte das expressões aqui apresentadas não serão demonstradas. Em geral, as demonstrações dessas expressões podem ser facilmente encontradas em qualquer livro que aborde os assuntos destacados.

A.1. Trigonometria

Relações básicas no triângulo retângulo:

$$\operatorname{sen} x = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} \qquad \cos x = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} \qquad \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

Definições básicas:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \quad , \quad \operatorname{csc} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \quad , \quad \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \quad , \quad \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

Relações Fundamentais:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x} \\ \dfrac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} + 1 = \dfrac{1}{\cos^2 x} \\ 1 + \dfrac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x \\ 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{csc}^2 x \end{cases}$$

Redução ao Primeiro Quadrante:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\operatorname{sen} x$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\operatorname{ctg} x$$

$$\operatorname{sen}(\pi + x) = -\operatorname{sen}(\pi - x) = -\operatorname{sen} x \qquad \cos(\pi + x) = \cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$\operatorname{tg}(\pi + x) = -\operatorname{tg}(\pi - x) = \operatorname{tg} x$$

Funções trigonométricos da soma de arcos.

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}a\cdot\cos b + \operatorname{sen}b\cdot\cos a$$
$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen}a\cdot\cos b - \operatorname{sen}b\cdot\cos a$$
$$\cos(a+b) = \cos a\cdot\cos b - \operatorname{sen}a\cdot\operatorname{sen}b$$
$$\cos(a-b) = \cos a\cdot\cos b + \operatorname{sen}a\cdot\operatorname{sen}b$$
$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg}a + \operatorname{tg}b}{1 - \operatorname{tg}a\cdot\operatorname{tg}b}$$
$$\operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg}a - \operatorname{tg}b}{1 + \operatorname{tg}a\cdot\operatorname{tg}b}$$

Arcos-Dobro e Arcos-Metade

$$\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}x\cdot\cos x$$
$$\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$$
$$\operatorname{tg}(2x) = \frac{2\operatorname{tg}x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$
$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}}$$
$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}}$$
$$\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}}$$

Funções Trigonométricas em função da tangente do arco-metade

$$\operatorname{tg}x = \frac{2\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)} \qquad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)} \qquad \operatorname{sen}x = \frac{2\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Transformação de Soma em Produto

$$\operatorname{sen}a + \operatorname{sen}b = 2\operatorname{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
$$\operatorname{sen}a - \operatorname{sen}b = 2\operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$
$$\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
$$\cos a - \cos b = -2\operatorname{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

Transformação de Produto em Soma

$$\operatorname{sen}a \cdot \cos b = \frac{1}{2} \cdot \left[\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b)\right]$$

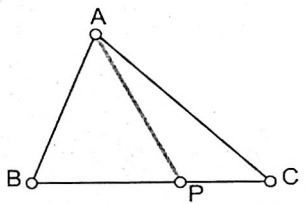
$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} \cdot \left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$$

$$\operatorname{sen}a \cdot \operatorname{sen}b = \frac{1}{2} \cdot \left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$$

A.2. Conceitos Básicos de Geometria Plana – Triângulos

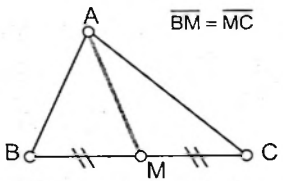
Ao longo do livro fizemos referências a algumas definições básicas de geometria plana, que veremos a seguir:

Ceviana: Uma ceviana é qualquer segmento de linha em um triângulo com uma das extremidades sobre um vértice do triângulo e a outra extremidade sobre seu lado oposto.



Definição Ap.2.1

Mediana: A mediana de um triângulo é o segmento de reta que liga um vértice deste triângulo ao ponto médio do lado oposto a este vértice.



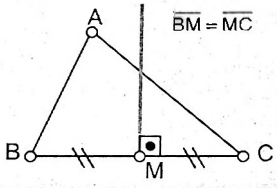
Definição Ap.2.2

Concorrência das Medianas de um Triângulo (Existência do Baricentro): As medianas relativas aos três vértices de um triângulo são concorrentes em um único ponto, que coincide com seu baricentro

Resultado Ap.2.1

Demonstração: Resultado foi demonstrado no exemplo 1.5.b

Mediatriz: A mediatriz de um lado de um triângulo é a reta perpendicular a este lado, passando pelo ponto médio do segmento de reta definido por este lado.



Definição Ap.2.3

Concorrência das Mediatrizes de um Triângulo (Existência do Circuncentro):

As mediatrizes relativas aos três lados de um triângulo são concorrentes em um único ponto, chamado circuncentro. O circuncentro relativo ao triângulo é o centro da circunferência que passa por seus três vértices.

Resultado Ap.2.2

Demonstração:

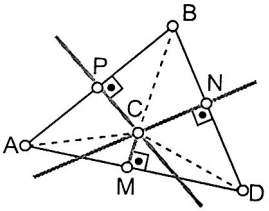


Figura I

Seja C o ponto de encontro das mediatrizes dos lados AB e BD. Construamos o segmento de reta perpendicular a AD passando por C.

Note que os triânglos APC e BPC são congruentes (caso LAL), portanto $\overline{AC} = \overline{BC}$

Os triângulos BNC e DNC são também congruentes (caso LAL), e portanto $\overline{BC} = \overline{DC}$ e, consequentemente, $\overline{AC} = \overline{DC}$.

Com isso, os triângulos AMC e DMC são congruentes e, portanto, $\overline{AM} = \overline{MD}$, o que mostra que MC é mediatriz do lado AD.

Da discussão acima, fica claro que AC = BC = DC e que, portanto, a circunferência com centro C, passando por um dos vértices do triânguo ABD, passará pelos demais vértices! □

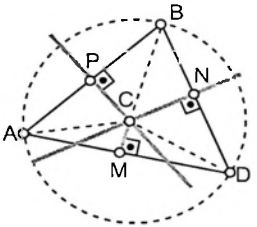
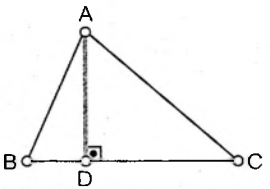


Figura II

Altura: A altura de um triângulo é a ceviana perpendicular a um lado do triângulo, ou ao seu prolongamento, traçado pelo vértice oposto. Esse lado é chamado de altura e o ponto onde a altura encontra a base é chamado de pé da altura.



Definição Ap.2.4

Concorrência das Alturas de um Triângulo (Existência do Ortocentro): As alturas relativas aos três lados de um triângulo são concorrentes em um único ponto, chamado ortocentro.

Resultado Ap.2.3

Demonstração:

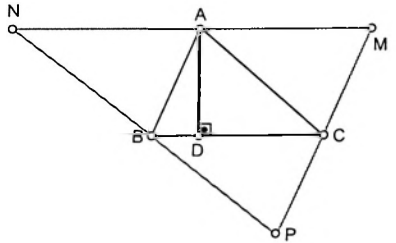


Figura I

Tracemos por A, uma paralela ao lado oposto BC; por B, tracemos a paralela ao lado oposto AC; por C, tracemos a paralela ao lado oposto AB.

Pela construção do triângulo PMN, temos que o quadrilátero ANBC é paralelogramo e, portanto, $\overline{AN} = \overline{BC}$. Pela mesma razão, o quadrilátero AMCB também é paralelogramo e, portanto, $\overline{AM} = \overline{BC}$. Segue que: $\overline{AN} = \overline{AM}$, ou que, ainda, A é ponto médio do segmento MN.

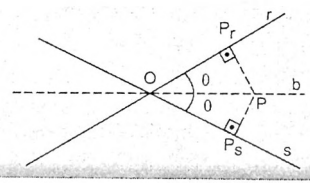
O raciocínio análogo para os demais vértices do triângulo nos permite chegar à conclusão de que A, B, C são pontos médios dos lados do triângulo MNP.

Ou seja, as alturas relativas aos três lados do triângulo ABC nada mais são do que as mediatrizes relativas aos lados do triângulo MNP.

Ora, mas nós já provamos que estas retas se interceptam em um único ponto, o circuncentro do triângulo MNP.

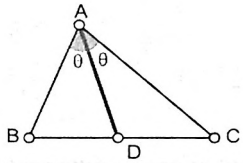
Logo, as alturas relativas ao triângulo A,B,C se inteceptam em um único ponto. □

Bissetriz de um ângulo (ou bissetriz relativa a duas retas não paralelas): A bissetriz é a reta que divide um dado ângulo em dois ângulos iguais. (para duas retas não paralelas, existirá sempre um par de bissetrizes, que seguirão a definição). O par de bissetrizes relativo a duas retas não-paralelas poderia ser igualmente definida como o lugar geométrico dos pontos que equidistam de duas retas não paralelas, uma vez que esta propriedade decorre diretamente da definição.



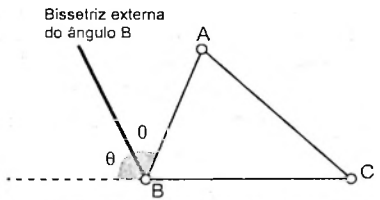
Definição Ap.2.5

Bissetriz Interna: Uma bissetriz interna de um triângulo é um segmento de reta que divide um de seus ângulos internos em dois ângulos iguais.



Definição Ap.2.6

Bissetriz Externa: Uma bissetriz externa de um triângulo é um segmento de reta que divide um de seus ângulos externos em dois ângulos iguais.



Definição Ap.2.7

Concorrência das Bissetrizes Internas de um Triângulo (Existência do Incentro): As bissetrizes internas relativas aos três vértices de um triângulo são concorrentes em um único ponto, chamado incentro. O incentro será o centro da circunferência inscrita a este triângulo.

Resultado Ap.2.4

Demonstração:

Tracemos as bissetrizes internas aos vértices A e C, se encontrando no ponto O. Tracemos também o segmento de reta BO. Vamos mostrar que BO é bissetriz do vértice B.

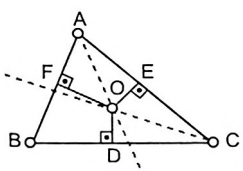


Figura I

A partir de O, vamos construir as perpendiculares a cada um dos três lados, com pés em D, E e F.

Note que, pelo caso de congruência LAA, temos:

$$\Delta COD \equiv \Delta COE$$
$$\Delta AOE \equiv \Delta AOF$$

Segue, portanto que: $\overline{FO} = \overline{EO} = \overline{DO}$

Como $\overline{FO} = \overline{DO}$, os triângulos BOF e BOD são, obrigatoriamente, triângulos retângulos. Pelo caso de congruência, LLA (aplicável para triângulos retângulos), temos que: $\Delta BOF \equiv \Delta BOD$ e, portanto, BO é bissetriz do ângulo interno B.

Em outras palavras, as três bissetrizes internas do triângulo ABC se interceptam em O (chamado incentro).

Além disso, como $\overline{FO} = \overline{EO} = \overline{DO}$, podemos traçar uma circunferência tangente aos três lados do triângulo com centro em O. Em outras palavras, o incentro do triângulo é o centro da circunferência inscrita ao mesmo. ▫

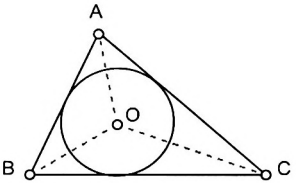
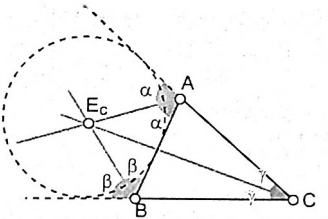


Figura II

Existência do Exincentro: As bissetrizes externas de dois vértices de um triângulo e a bissetriz interna do terceiro vértice se encontram em um ponto chamado exincentro. A circunferência de centro no exincentro e tangente a um dos lados (ou seu prolongamento) do triângulo será tangente aos demais.

Notação: Cada triângulo possui 3 exincentros. Para denotar o exincentro referente ao lado oposto ao vértice C (lado AB), usaremos a notação a seguir E_C.



Resultado Ap.2.5

Demonstração:

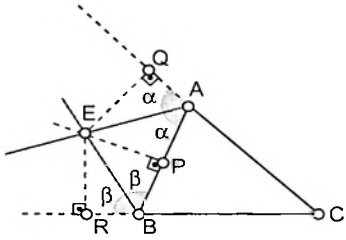


Figura I

Seja E o ponto de encontro das bissetrizes externas relativas aos vértices A e B. Vamos mostrar que a bissetriz interna do vértice C também passa por E.

A partir de E, vamos construir as perpendiculares a cada um dos lados (ou seus prolongamentos) AB, AC e BC, com pés em P,Q,R, respectivamente

Note que, pelo caso de congruência LAA, temos:

$$\Delta EPA \equiv \Delta EQA$$
$$\Delta EPB \equiv \Delta ERB$$

Segue, portanto, das congruências acima, que: $\overline{EQ} = \overline{ER} = \overline{EP}$ (Eq. I)

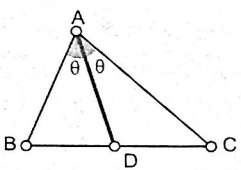
Ora, mas pela definição de bissetriz interna, como E é equidistante dos prolongamentos dos lados AC e BC, então E está sobre a bissetriz do vértice C, como queríamos demonstrar.

Da equação I, temos que uma circunferência de centro em E e tangente ao lado AB, por exemplo, necessariamente será tangente aos prolongamentos dos lados BC e AC. □

Teorema da Bissetriz Interna:

A bissetriz interna de um triângulo divide o lado oposto em segmentos proporcionais aos lados adjacentes.

Na figura abaixo, este teorema se traduz da seguinte forma. $\frac{\overline{AC}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}}$



Resultado Ap.2.6

Demonstração: Tracemos uma paralela à bissetriz AD pelo vértice B. Seja P o ponto de encontro desta paralela com o prolongamento do lado CA.

Note, na figura I abaixo que, dado o paralelismo entre BP e DA, os ângulos destacados são iguais.

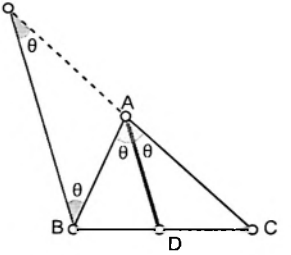


Figura I

Da figura I, segue que o triângulo ABP é isósceles ($P\hat{B}A = B\hat{P}A = \theta$) e, portanto: $\overline{AB} = \overline{AP}$ (Eq. I)

Como os triângulos DCA e BCP são semelhantes, temos:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{BC}} \Rightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AC} + \overline{AP}}{\overline{BD} + \overline{DC}}$$

$$\overset{\text{Eq. I}}{\Rightarrow} \frac{\overline{AC}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AC} + \overline{AB}}{\overline{BD} + \overline{DC}}$$

$$\Rightarrow \overline{AC} \cdot \overline{BD} + \cancel{\overline{AC} \cdot \overline{DC}} = \cancel{\overline{AC} \cdot \overline{DC}} + \overline{AB} \cdot \overline{DC}$$

$$\Rightarrow \overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{DC}$$

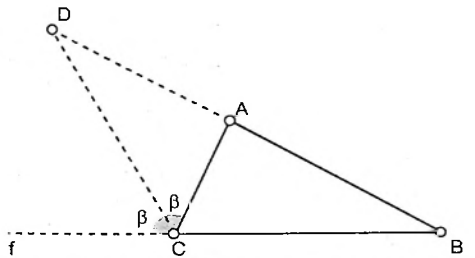
$$\Rightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} \quad \square$$

Teorema da Bissetriz Externa:

Se a bissetriz de um ângulo externo de um triângulo intercepta a reta que contem o lado oposto, então ela divide este lado oposto externamente em segmentos proporcionais ao lados adjacentes.

Na figura abaixo, este teorema se traduz da seguinte forma: sendo D o ponto em que a bissetriz ao ângulo externo C do triângulo ABC encontra o prolongamento do lado oposto AB, temos que:

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DA}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CA}}$$



Resultado Ap.2.7

Demonstração:

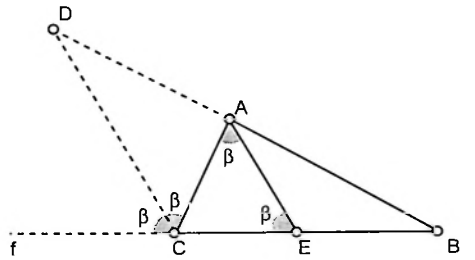


Figura I

Da definição de bissetriz externa, temos que: $D\hat{C}f = D\hat{C}A = \beta$

Tracemos a paralela AE à bissetriz externa ao ângulo C. Do paralelismo, segue que:

$$C\hat{E}A = D\hat{C}f = \beta$$

$$C\hat{A}E = D\hat{C}A = \beta$$

Logo, o triângulo ACE é isósceles e $\overline{CE} = \overline{CA}$ (Eq. I)

Da semelhança entre os triângulos $\Delta ABE \approx \Delta DBC$, segue: $\frac{\overline{DB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BE}}$

Usando a equação I:

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BE}} \Rightarrow \frac{\overline{DB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC} - \overline{CE}} = \frac{\overline{DB} - \overline{DA}}{\overline{BC} - \overline{AC}}$$

$$\Rightarrow \overline{DB} \cdot \left(\overline{CB} - \overline{CA}\right) = \overline{CB}\left(\overline{DB} - \overline{DA}\right)$$

$$\Rightarrow \cancel{\overline{DB}\cdot\overline{CB}} - \overline{DB}\cdot\overline{CA} = \cancel{\overline{CB}\cdot\overline{DB}} - \overline{CB}\cdot\overline{DA}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{DB}}{\overline{DA}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CA}} \quad \square$$

A.3. Tabela de Derivadas e Integrais Básicas

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)^n\right) = n \cdot f(x)^{n-1} \frac{df(x)}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left(f(x) + g(x)\right) = \frac{df(x)}{dx} + \frac{dg(x)}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left(f(x) \cdot g(x)\right) = g(x) \cdot \frac{df(x)}{dx} + f(x) \cdot \frac{dg(x)}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)\frac{df(x)}{dx} - f(x) \cdot \frac{dg(x)}{dx}}{\left(g(x)\right)^2}$$

$$f(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t) \cdot dt\right), \text{ onde } a \text{ é uma constante real.}$$

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot \frac{dg(x)}{dx}$$

Derivadas de funções básicas:

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}x = \cos x \quad ; \quad \frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen}x$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{tg}x = \sec^2 x \quad ; \quad \frac{d}{dx}\operatorname{ctg}x = -\csc^2 x$$

$$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \cdot \operatorname{tg}x \quad ; \quad \frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cdot \operatorname{ctg}x$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{Arc}\cos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \; ; \quad \frac{d}{dx}\operatorname{Arcsen}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{Arctg}x = \frac{1}{1+x^2} \quad ; \quad \frac{d}{dx}\operatorname{Arcctg}x = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x} \; ; \quad \frac{d}{dx}e^x = e^x \; ; \quad \frac{d}{dx}a^x = a^x \cdot \ln a$$

Integrais imediatas:

$$\int x^n \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$$

$$\int e^x \cdot dx = e^x + c$$

$$\int a^x \cdot dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int \operatorname{sen}x \cdot dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x \cdot dx = \operatorname{sen}x + c$$

$$\int \sec^2 x \cdot dx = \operatorname{tg}x + c$$

$$\int \sec x \cdot dx = \ln|\sec x + \operatorname{tg}x| + c$$

$$\int f(x) \cdot g'(x) \cdot dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) \cdot dx$$

$$\int f(x) \cdot dx = g(x) \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x) \cdot dx = g(b) - g(a)$$

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

Capítulo 1

1.1) $\vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{c} = -\frac{3}{2}$

1.2) $|\vec{p}| = 3$

1.7) $P = \left(\frac{124}{49}, \frac{64}{49}\right)$, $Q = \left(\frac{239}{49}, \frac{87}{49}\right)$

1.8) $|\vec{u} + \vec{v}|_{max} = 6$

1.10) $(4b, -2b)$

1.17) Área $= \frac{\sqrt{3}}{12}.(\overline{AB} + \overline{BC}).(\overline{BC} + \overline{CD})$

Capítulo 2

2.1) $y = \frac{a}{b}.\left(x - a.\left(\frac{1+m}{2}\right)\right) + \frac{b.(1-m)}{2}$

2.2) $3y + x - 10 = 0$

2.3) $y = -\frac{3}{4}x + 2$ e $y = \frac{5}{12}x + 2$

2.4) $-\frac{5}{3} > y > -3$

2.5) $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y-4)^2 = \frac{9}{4}$

2.7) $\frac{4}{5}$

2.8) $3x - 4y = 11$ e $5x + 6y = 12$

2.9) $q = \frac{\sqrt{3}}{4}$

2.10) a) $x_o > -\frac{y_o^2}{2p} + \frac{p}{2}$ b) O L.G. é a reta $x_o = p$ $(p > 0)$

2.11) O L.G. de P é uma esfera com centro coincidindo com o centro (2,2,2) do cubo, e raio igual à metade da diagonal do cubo, i.e. $R = 2\sqrt{3}$

2.12) 12

2.13) $\frac{3\sqrt{3}}{4}.L^2$ onde L é o comprimento da aresta do cubo

2.12) L.G. é a circunferência de equação: $\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$

2.14) $\frac{L^2\sqrt{3}}{3}$

2.15) $(x + 2y)_{Max} = \frac{138}{11}$

2.16) a) $(x - 3)^2 + \left(y - 2\sqrt{2}\right)^2 = 9$ b) $y = 5 + 2\sqrt{2} \pm \frac{4}{3}(x - 3)$

2.17) b) $\frac{\sqrt{3}}{2}.\left(a^2 + 2ab - 2b^2\right)$

2.18) $2x + y = 5$ e $x = 2y$

2.19) $\left(x - \frac{25}{4}\right)^2 + y^2 = \frac{25}{16}$

2.20) $x = z$

2.22) $\beta: x + y = 1$

2.23) $y^2 = R^2.\left(\frac{x^2 - 1}{x^2}\right)$

2.24) $R = \frac{145\sqrt{2} + 15\sqrt{29}}{49}$

2.25) $\frac{x - \frac{22}{35}}{3} = \frac{y - \frac{22}{35}}{-5} = z - \frac{44}{35}$

2.26) $V = \frac{100}{9}$ unidades de volume

2.27) $\sqrt{\frac{278}{21}}$

2.28) $(x^2 + y^2)_{máx} = 36$

2.29) 6

2.30) $\frac{1}{3}$ unidades de distância

2.31) $-2x + y + z + 1 = 0$

2.32) $\frac{1}{3}$ unidades de distância

2.33) $x + y + 1 = 0$

2.34) A segunda reta tem equação: $y = 3x - 2$

Existem duas circunferências que atendem à descrição do problema, e suas equações são dadas por:

$\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{2}{5}\right)^2 = \frac{13}{5}$ e $\left(x + \frac{9}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{18}{5}\right)^2 = \frac{73}{5}$

2.35) $x + y + 2z - 6 - \sqrt{6} = 0$

2.36) Dois pares de retas atendem às condições:
$y = 2x - 3$ e $2y = 9 - x$ ou $2y = x + 3$ e $y = -2x + 9$

2.37) $x^2 + (y + 2)^2 = 8$

2.38) Circunferência de centro (0,0) e raio $\sqrt{6}$

2.39) $x - 1 = \frac{y + 2}{-2} = z - 1 = t \in \mathbb{R}$

2.40) $(x-2)^2 + (y+4)^2 = 18$

2.43) Circunferência de centro em (x_o, y_o) e raio r.

Capítulo 3

3.1) Eixos: $6\sqrt{2}$ e 12, excentricidade: $\sqrt{3}$

3.2) Elipse de centro em $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ e semieixos maior e menor de comprimentos $\frac{a}{2}$ e $\frac{b}{2}$, respectivamente.

OBS: Sendo $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ a equação da elipse dada, com A = (–a,0), temos que a equação do LG pedido é:

$$\frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{b}{2}\right)^2} = 1$$

3.3) O LG procurado é uma elipse de centro no ponto médio de $\overline{AB}$ e semieixos maior de medida $\frac{p - 2c}{6}$ e menor de medida $\frac{p \cdot (p - 4c)}{12}$ sendo 2c a medida de $\overline{AB}$. Do LG devemos excluir os 2 vértices localizados no eixo focal.

3.4) Par de hipérboles: $x^2 - y^2 = \pm\frac{1}{3}$

3.5) LG é a circunferência de centro B e raio (2a – d), a menos dos pontos colineares a A e B.

3.6) $y^2 - x^2 = 16$ (hipérbole), com exceção do ponto B

3.7) a) $F = \left(-2, -\frac{8}{3}\right)$ b) d: $3x + 4y + \frac{125}{3} = 0$

3.8) Elipse de eixos maior e menor de medidas 6 e 3, respectivamente, com exceção dos vértices do eixo foca

OBS.: Sendo $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ a equação da elipse dada, temos que a equação do LG pedido é:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{4y^2}{9} = 1 \ , \ y \neq 0$$

3.9) Elipse de eixo maior AB e eixo menor de medida 4, com exceção dos pontos A e B.

3.10) Mostra-se que as equações são equivalentes a:

$$\frac{(x - x_o)^2}{a^2} + \frac{(y - y_o)^2}{b^2} = 1$$

Uma parametrização para a equação da parábola proposta pode ser:

$$\begin{cases} x = t \\ y = \frac{t^2}{2p} \end{cases}$$

3.12) b) $2y = 1 + x^2$ c) D = (3,5)

3.13) $y = -\frac{x^2}{h} + \frac{\overline{AB}^2}{4h}$ (parábola)

3.18) $S = \frac{2}{\sqrt{a}}\left(a \cdot x_o^2 - y_o\right)^{\frac{3}{2}}$

LG de A, admitindo S constante é parábola de equação:

$$y = ax^2 - \left(\frac{a \cdot S^2}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$$

3.19) $\pm x = \frac{2}{p} \cdot y^2 + \frac{p}{2}$

(duas parábolas com vértice coincidindo com o foco da parábola original)

3.20) O LG terá equação: $2x \cdot y - y_o \cdot x - x_o \cdot y \pm K = 0$

i) Par de hipérboles, se $K \neq \frac{x_o^2 + y_o^2}{4}$

ii) Par de retas perpendiculares, se $K = \frac{x_o^2 + y_o^2}{4}$

3.22) O LG terá equação: $\left(x - \frac{7}{5}\right)^2 - y^2 = \frac{162}{25}$ (hipérbole)

3.24) O L.G. do ponto médio do segmento AC é a semi-circunferência de centro no ponto médio de AO e raio R/2.

3.27) O L.G. de A é dado pela equação paramétrica:

$$\frac{y_A^2}{k} + x_A^2 = d^2$$

iscutindo o LG para os casos particulares de k:

$0 < k < 1 \rightarrow$ elipse, com eixo principal na horizontal

$k = 1 \rightarrow$ circunferência de raio d e centro $(0,0)$

$k > 1 \rightarrow$ elipse, com eixo principal na vertical

3.29) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$

3.33) O LG é a diretriz da parábola.

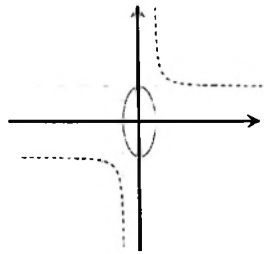
3.37) O ângulo entre as curvas são: $\pm \text{Arc tan}\left(\sqrt{6}\right)$

3.38) $x^2 - y^2 = 9$ (hipérbole)

3.39) $\frac{a^2}{x'^2} + \frac{b^2}{y'^2} = 1$

Gráfico: o esboço abaixo considera uma elipse tal que b > a. Note que, apesar da

aparência hiperbólica, o LG não é uma cônica.



3.41)
a) O LG é uma superfície cônica que compartilha o mesmo eixo do cone e cuja geratriz vale: $\beta = \text{Arcsen}\left(\frac{\cos\alpha}{2}\right)$
b) A área do segmento é dada por: $S = \frac{8}{3} d^2 \operatorname{sen}\alpha$

3.42) $x^2 + (y-3)^2 = 4$, com exceção dos pontos (0,1) e (0,5)

3.43) Hipérbole centrada em $(r, -2r)$ com semi-eixos valendo r.

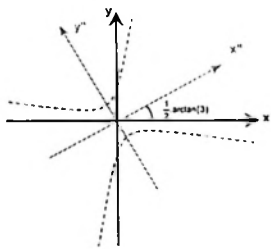
3.44) O L.G. de M_2 é a circunferência de centro F e raio 2.a

3.45) $10(y+3)^2 - 3x^2 = 30$

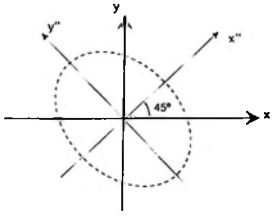
3.46) Elipse com focos nos centros de C_1 e C_2 e eixo maior de medida $r_1 + r_2$

Capítulo 4

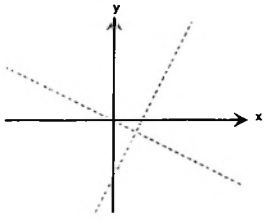
4.1) a) hipérbole



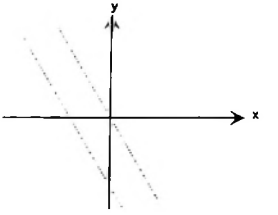
b) elipse

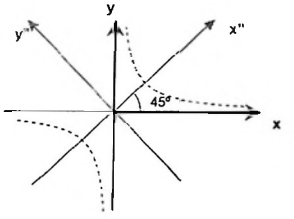


c) Duas retas concorrentes ($2y + x = 0$ e $y = 2x - 1$)

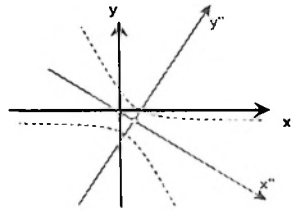


d) Duas retas paralelas ($2x + y = 0$ e $2x + y + 3 = 0$)

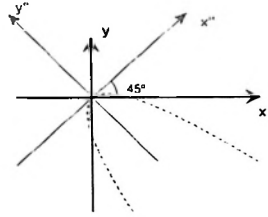




f) hipérbole



g) parábola



4.2) a) hipérbole, $\theta_{Rotação} = \frac{1}{2}\,\text{Arc tan}\left(\frac{3}{4}\right)$

b) elipse, $\theta_{Rotação} = 45^{\circ}$

c) hipérbole, $\theta_{Rotação} = 45^{\circ}$

4.3) $\frac{a}{b} = -\frac{4}{15}$

4.4) Ponto de tangência = (2, 0)

4.5) Existem dois valores de α que atendem à condição: $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ou $\alpha = \frac{5\pi}{4}$

4.6) $7x + 15y + 7 = 0$

4.7) O ângulo agudo é dado por: $\theta = \text{Arc tan}\left(\frac{\sqrt{t^2 - p^2}}{p}\right)$

4.10) O LG pedido é a elipse de equação: $x^2 + 2y^2 = 8$

4.10) O LG pedido é a elipse de equação: $x^2 + 2y^2 = 2$

4.12) Os possíveis valores de a são: 1, $\frac{3}{4}$ e $\frac{5}{4}$

4.13) O L.G. é representado pelas duas curvas:

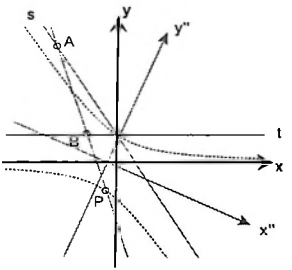
$$\begin{cases} 4x^2 + 4y^2 \div 4\sqrt{3}by - b^2 = 0 \text{ (circunferência)} \\ 4x^2 - 28y^2 + 4\sqrt{3}by - b^2 = 0 \text{ (hipérbole)} \end{cases}$$

4.14) $k = \frac{5}{2}$

4.18) O L.G. do ponto médio do segmento AB é a curva de equação

$$4y^2 + 6xy + 3y - 45 = 0 \text{ (hipérbole)}$$

Gráfico:



4.19) Tipo parábola

4.20)

$$\begin{cases} a < -2 & \rightarrow 0 \text{ soluções} \\ -2 \leq a < 2 & \rightarrow 1 \text{ solução} \\ 2 \leq a < \sqrt{5} & \rightarrow 2 \text{ soluções} \\ a = \sqrt{5} & \rightarrow 1 \text{ solução} \\ a > \sqrt{5} & \rightarrow 0 \text{ soluções} \end{cases}$$

4.21)

$$\begin{cases} |a| > 1 & \rightarrow 1 \text{ solução} \\ 0 < |a| \leq 1 & \rightarrow 2 \text{ soluções} \\ |a| = 0 & \rightarrow 1 \text{ solução} \end{cases}$$

4.22)

$$\begin{cases} a < 0 & \rightarrow 1 \text{ solução} \\ a > 0 & \rightarrow 2 \text{ soluções} \end{cases}$$

BIBLIOGRAFIA

A seguir está uma lista de livros/materiais que foram utilizados como referência para a compilação adequada deste livro, e são altamente sugeridos para os vestibulandos IME/ITA.

ÁVILA, Geraldo. Ainda as Séries Infinitas. Revista do Professor de Matemática, n. 31. Sociedade Brasileira de Matemática, 1996.

ERBAS, A. Kursat. An Explanatory Approach to Archimedes's Quadrature of the Parabola. University of Georgia, 2000. Disponivel em: <http://jwilson.coe.uga.edu/emt668/EMAT6680.F99/Erbas/emat6690/essay1/essay1.html>. Acesso em jul. 2010.

STEIN, S. Archimedes: What Did He Do Besides Cry Eureka?, MAA, 1999

LI, Kin-Yin. Mathematical Excalibur. Disponivel em: <http://www.math.ust.hk/mathematical_excalibur >. Acesso em 20 ago.2013

BOGOMOLNY, A., Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles < http://www.cut-the-knot.org >. Acesso em 08 Setembro de 2013

MORGADO, Augusto César, WAGNER, Eduardo, JORGE, Miguel. Geometria II. Ed. Vestseller, 4ª Edição, 2009.

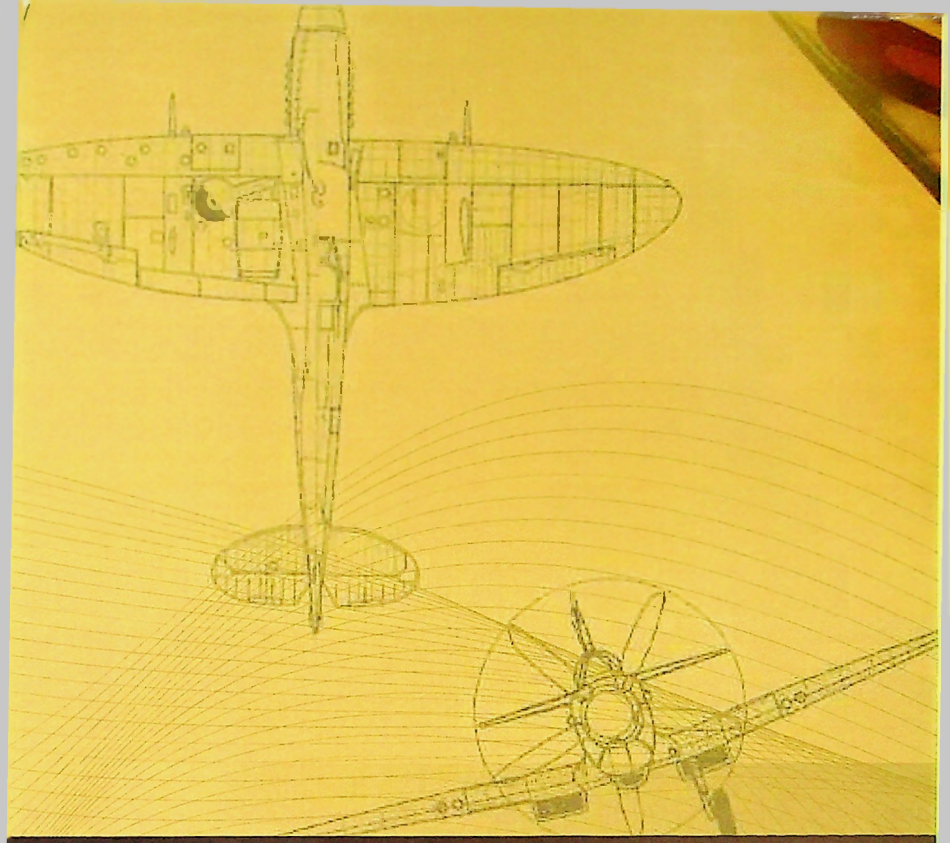
MORGADO, A. C. Coordernadas para os Centros do Triângulo. Revista do Professor de Matemática, n. 43. Sociedade Brasileira de Matemática, 2000.

NETTO, Sergio Lima. A Matemática no Vestibular do IME, Ed. Vestseller, 1ª Edição, 2011

NETTO, Sergio Lima. A Matemática no Vestibular do ITA, Ed. Vestseller, 1ª Edição, 2013

VALLADARES, Renato J. C. Elipses, sorrisos e sussurros. Revista do Professor de Matemática, n. 36. Sociedade Brasileira de Matemática, 1998.

WAGNER, Eduardo. Por que as antenas são parabólicas. Revista do Professor de Matemática, n. 33. Sociedade Brasileira de Matemática, 1997.



ISBN 85606532 7-9

9 788560 653270

EDITORA VestSeller

www.vestseller.com.br